Problemas – Tema 6

Problemas resueltos - 14 - método directo para obtener matriz inversa

1. Dada las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ **resolver la ecuación** $A\cdot X=B$

Estos problemas de ecuación matriciales se pueden resolver de dos formas:

- Colocando incógnitas en los elementos de $X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, operar y resolver el sistema resultante.

- Aplicar matriz inversa y despejar X , de la forma: $X=A^{-1}B$ (en capítulos posteriores del tema aprenderemos a obtener la matriz inversa)

La primera opción es práctica para matrices 2×2 ya que resulta un sistema 4×4 que no suele ser difícil de resolver. Pero para matrices $3x3$ es poco práctico porque genera un sistema 9×9 largo de resolver.

La segunda opción se puede aplicar siempre que exista la inversa A^{-1} . Si esta inversa existe, la solución de X será única y podremos aplicar este método. Si no existe A^{-1} la solución de X no será única y solo podremos resolverla con la primera opción, dando incógnitas a los elementos de X .

Cuando aprendamos determinantes veremos una manera muy directa de comprobar que una matriz admite o no inversa (viendo si su determinante es no nulo). Con lo que sabemos de matrices podemos verificar si admite inversa viendo si el rango de la matriz es 2, es decir, si los dos vectores que forman la matriz son linealmente independientes.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow ¿\exists A^{-1}?$$

Cuando son dos vectores la forma más directa de ver que no son proporcionales es dividiendo sus componentes $\rightarrow$ $\frac{2}{1}\neq\frac{3}{2}$ $\rightarrow$ Al no cumplirse la igualdad no son proporcionales, es decir, son independientes y el rango de la matriz vale dos.

Si la matriz hubiese sido 3×3 tendríamos que haber obtenido la matriz triangular por el método de Gauss, y el número de filas no nulas sería igual al número de vectores linealmente independientes.

Ya sabemos que nuestra matriz admite inversa. Ahora hay que calcularla. Podemos aplicar el método directo para obtener la inversa o bien Gauss-Jordan.

El método directo es práctico para matrices 2×2 mientras que Gauss-Jordan suele ser más práctico para matrices de orden superior.

Apliquemos en nuestro caso el método directo.

$$A\,A^{-1}=I \;\rightarrow\; \begin{pmatrix}2 & 3\\1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \;\rightarrow\; \begin{pmatrix}2a+3c & 2b+3d\\a+2c & b+2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{matrix}2a+3c=1\\2b+3d=0\\a+2c=0\\b+2d=1\end{matrix}\right\}$$ → De la tercera $a=-2c$ → $$\left\{\begin{matrix}2(-2c)+3c=1\\2b+3d=0\\b+2d=1\end{matrix}\right\}$$ → De la primera $c=-1$

$$\left\{\begin{matrix}2b+3d=0\\b+2d=1\end{matrix}\right\}$$ → De la segunda $b=1-2d$ → En la primera $2(1-2d)+3d=0 \;\rightarrow\; d=2$

La matriz inversa queda $A^{-1}=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -3\\-1 & 2\end{pmatrix}$

Podemos obtener la matriz incógnita:

$$X=A^{-1}B \;\rightarrow\; X=\begin{pmatrix}2 & -3\\-1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1\\2 & -5\end{pmatrix} \;\rightarrow\; X=\begin{pmatrix}0 & 17\\1 & -11\end{pmatrix}$$

Dos métodos distintos para resolver el ejercicio. Como hemos explicado, lo importante es tener claro cuando suele ser más práctico aplicar un método u otro.

2. Indica si son ortogonales las siguientes matrices.

a) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

a) Una matriz es ortogonal cuando la inversa coincide con su traspuesta.

$$A=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \rightarrow A^t=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Calculemos la matriz inversa por el método directo:

$$A\cdot A^{-1}=I \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{a\sqrt{3}}{2}-\frac{c}{2} & \frac{b\sqrt{3}}{2}-\frac{d}{2} \\ \frac{a}{2}+\frac{c\sqrt{3}}{2} & \frac{b}{2}+\frac{d\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Igualando componentes llegamos a un sistema de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas, que debemos resolver.

$$\begin{cases} \frac{a\sqrt{3}}{2}-\frac{c}{2}=1 \\ \frac{b\sqrt{3}}{2}-\frac{d}{2}=0 \\ \frac{a}{2}+\frac{c\sqrt{3}}{2}=0 \\ \frac{b}{2}+\frac{d\sqrt{3}}{2}=1 \end{cases} \rightarrow c=\frac{-1}{2} \;,\; a=\frac{\sqrt{3}}{2} \;,\; b=\frac{1}{2} \;,\; d=\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Y se cumple que $A^{-1}=A^t$ → La matriz es ortogonal.

b) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

La matriz A coincide con la matriz identidad. Y la inversa de la matriz identidad es la propia matriz identidad.

$A^{-1}=A^t=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ → Son ortogonales

c) $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$$A\cdot A^{-1}=I \rightarrow \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}\frac{a}{2}+\frac{c}{2} & \frac{b}{2}+\frac{d}{2}\\ \frac{-a}{2}+\frac{c}{2} & \frac{-b}{2}+\frac{d}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

Igualando componentes:

$$\begin{cases}\frac{a}{2}+\frac{c}{2}=1\\ \frac{b}{2}+\frac{d}{2}=0\\ \frac{-a}{2}+\frac{c}{2}=0\\ \frac{-b}{2}+\frac{d}{2}=1\end{cases} \rightarrow \quad c=1 \quad , \quad a=1 \quad , \quad d=1 \quad , \quad b=-1 \quad \rightarrow \quad A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}$$

La traspuesta es: $A^t=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{-1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

Por lo tanto: $A^{-1}\neq A^t$ → La matriz no es ortogonal.