Problemas sobre derivabilidad en funciones a trozos

CURSO	**TEMA**	**WWW.DANIPARTAL.NET**
1ºBach CCSS	Derivadas	Colegio Marista "La Inmaculada" de Granada

PROBLEMA 1

Sea la función $f(x)=\begin{cases} ax^2+3x & si\ x\leq 2 \\ x^2-bx-4 & si\ x>2 \end{cases}$. Calcular a y b para que la función sea derivable en $x=2$.

En primer lugar, la función debe ser continua en el punto frontera:

$$\exists f(2)=a\cdot 2^2+3\cdot 2\rightarrow f(2)=4a+6$$
$$L^- = \lim_{x\to 2^-}(ax^2+3x)=4a+6$$
$$L^+ = \lim_{x\to 2^+}(x^2-bx-4)=4-2b-4\rightarrow L^+=-2b$$
$$L^- = L^+ = L\rightarrow 4a+6=-2b$$
$$f(2)=L\rightarrow 4a+6=4a+6\ (tautología)$$

Además, la función debe ser suave en el punto frontera. Por lo que las derivadas laterales deben coincidir.

$$f'(x)=\begin{cases} 2ax+3 & si\ x\leq 2 \\ 2x-b & si\ x>2 \end{cases}$$
$$f'(2^-)=4a+3$$
$$f'(2^+)=4-b$$
$$f'(2^-)=f'(2^+)\rightarrow 4a+3=4-b$$

Llegamos a un sistema 2x2:

$$\begin{cases} 4a+2b=-6 \\ 4a+b=1 \end{cases}$$

Aplicamos reducción, restamos ambas ecuaciones:

$$b=-7$$

Y despejamos el valor del otro parámetro inicial:

$$4a-7=1$$
$$a=2$$

PROBLEMA 2

Sea la función $\boldsymbol{f(x) = \begin{Bmatrix} a - x \ \ si \ \ x \leq 1 \\ \frac{b}{x} + \ln(x) \ \ si \ \ x > 1 \end{Bmatrix}}$ **continua y derivable en** $\boldsymbol{x = 1}$**.**

Obtener $\boldsymbol{a}$ **y** $\boldsymbol{b}$**.**

Si la función es continua en $x = 1$ debe cumplir:

$\exists f(1) = a - 1$

$\lim_{x \to 1^-} (a - x) = a - 1$

$\lim_{x \to 1^-} (\frac{b}{x} + \ln(x)) = b$

Igualdad de límites laterales $\rightarrow a - 1 = b$

La función definida en $x = 1$ coincide con el límite en $x = 1 \rightarrow a - 1 = a - 1 \ (tautología)$

Ya tenemos una primera condición que deben cumplir ambos parámetros.

Ahora estudiamos la derivabilidad (suavidad). Si la función es derivable en $x = 1$ las derivadas laterales en ese punto deben coincidir.

$f'(x) = \begin{Bmatrix} -1 \ \ si \ \ x \leq 1 \\ \frac{-b}{x^2} + \frac{1}{x} \ \ si \ \ x > 1 \end{Bmatrix} \rightarrow f'(1^-) = f'(1^+) \rightarrow -1 = b + 1 \rightarrow b = 2$

Ya tenemos el valor $b = 2 \rightarrow$ Si $a - 1 = b \rightarrow a = 3$