Teoría – Tema 5

CCSS - Teoría - 3c - Introducción a las indeterminaciones

¿Qué es una indeterminación?

Hasta ahora hemos calculado límites cuyo valor (finito o infinito) ha sido relativamente fácil de obtener aplicando operaciones básicas de sumar, restar, multiplicar y/o dividir.

$\lim_{x \to 3} (x^2+2x-2)=13$ → Límite finito en $x_0=0$

$\lim_{x \to +\infty} x^2=+\infty$ → Límite infinito en el infinito

¿Qué ocurre si, al operar en los límites, no sabemos determinar el resultado final de la operación?

Es decir, ¿qué ocurre si tengo, por ejemplo, $0\cdot\infty$? ¿El 0 hace que todo el producto sea 0 o el ∞ hace que todo el producto sea ∞ ?

Esto son ejemplos de indeterminaciones: límites donde el resultado final no se obtiene de manera evidente, sino que debemos operar convenientemente siguiendo una serie de reglas.

Tipos de indeterminaciones y ejemplos

Indeterminación $\frac{k}{0}$ **con** $k \neq 0$ → Debemos evaluar los límites laterales. Y si son iguales la función tendrá límite (aunque no esté definida en ese punto porque no podemos dividir por 0).

$\lim_{x \to 1} \frac{x}{x-1} = \frac{1}{0}$ → Indeterminación → Estudiamos sus límites laterales

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x}{x-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x}{x-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Este tipo de indeterminaciones serán típicos en el estudio de las asíntotas verticales de una función, como veremos más adelante.

Indeterminación $\frac{0}{0}$ → Si estamos ante una función racional (cociente de funciones) una primera opción es descomponer numerado y denominador para simplificar factores.

Importante: en los límites sí puedo simplificar entre numerador y denominador; al evaluar la función en un punto no puedo simplificar. No olvides nunca esto!!

$\lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{0}{0}$ → Indeterminación → Intento simplificar entre numerador y denominador

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = \lim_{x \to -1} (x-1) = -2$$

Es decir: el límite existe en $x_0 = -1$, aunque la función no esté definida en $\nexists f(-1)$ ya que no puedo dividir por 0 . Estamos ante una discontinuidad evitable en $x_0 = -1$.

Las indeterminaciones $\frac{0}{0}$ también pueden aparecer en cociente de funciones que contienen raíces cuadradas. Una buena técnica para solventar esta indeterminación es multiplicar numerador y denominador por el conjugado del numerador o del denominador. Con esto, podremos simplificar y resolver el límite.

$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = \frac{0}{0}$ → Indeterminación

Multiplicamos y dividimos por conjugado del denominador

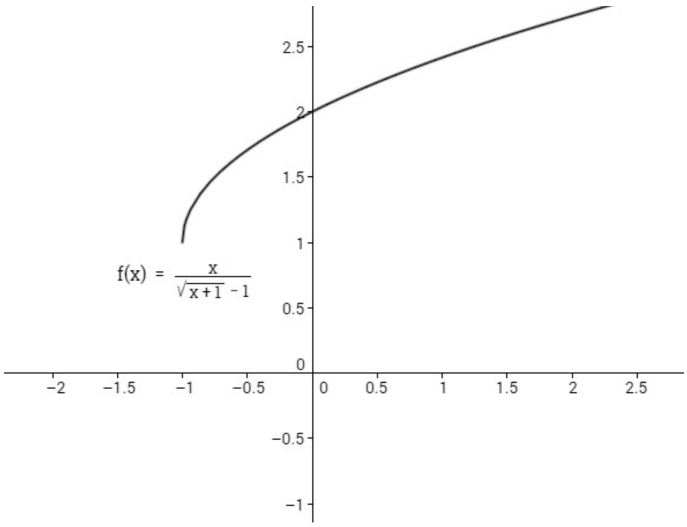
$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{x \to 0} \frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x+1-1} = \lim_{x \to 0} \frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x}$$

Simplificamos entre numerador y denominador.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x} = \lim_{x \to 0} \sqrt{x+1}+1 = 2$$

Podemos corroborar este valor del límite con la representación gráfica de la función. La función no está definida en $x_0=0$ pero sí existe el límite a izquierda y derecha de este punto.

$$La\ gráfica\ no\ está\ definida\ en\ x_0=0\ pero\ sí\ existe\ el\ límite\ en\ x_0=0$$



Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ → Si esta indeterminación aparece en cociente de polinomios, o en cociente de raíces, podemos aplicar la técnica de dividir cada término por la variable x elevada al mayor exponente que aparezca en la función.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x+1} = \frac{\infty}{\infty}$ → Indeterminación

$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{2x}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{1+\frac{1}{x}}$ → Recuerda $\frac{1}{\infty}=0$ → $\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{1+\frac{1}{x}} = \frac{2}{1+0} = 2$

Por lo tanto, nuestro límite es igual a 2 . Una regla que podemos obtener de este ejemplo es la siguiente:

si poseo un cociente de polinomios del mismo grado, el límite en el infinito es igual al cociente de los coeficientes que acompañan al mayor grado de la variable x **.**

Veamos otro ejemplo.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x+1} = \frac{\infty}{\infty} \quad \to \text{Indeterminación}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^3}{x^3}}{\frac{x}{x^3}+\frac{1}{x^3}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}} \quad \to \text{Recuerda} \quad \frac{1}{\infty}=0 \quad \to \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}} = \frac{1}{0} = \infty$$

Otro ejemplo.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^4+1} = \frac{\infty}{\infty} \quad \to \text{Indeterminación}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^4+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^2}{x^4}}{\frac{x^4}{x^4}+\frac{1}{x^4}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^4}} \quad \to \text{Recuerda} \quad \frac{1}{\infty}=0 \quad \to \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^4}} = \frac{0}{1+0} = 0$$

Si aparecen raíces, debemos tener en cuenta el grado de la raíz para saber el grado de la variable x por el que debemos dividir cada término. Veamos esto en el siguiente ejemplo.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^2}{\sqrt{x^4-1}} = \frac{\infty}{\infty} \quad \to \text{Indeterminación}$$

El grado máximo es $x^{\frac{4}{2}} = x^2$,que dentro de la raíz entra como x^4 .

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^2}{\sqrt{x^4-1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{5x^2}{x^2}}{\sqrt{\frac{x^4}{x^4}-\frac{1}{x^4}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{5}{\sqrt{1-\frac{1}{x^4}}} = \frac{5}{1} = 5$$

Otro ejemplo.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^2}{\sqrt{x^6-1}} = \frac{\infty}{\infty}$$ → Indeterminación

El grado máximo es $x^{\frac{6}{2}} = x^3$,que dentro de la raíz entra como x^6 .

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^2}{\sqrt{x^6-1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{5x^2}{x^3}}{\sqrt{\frac{x^6}{x^6} - \frac{1}{x^6}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{5}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^6}}} = \frac{0}{1} = 0$$

Indeterminación $\infty - \infty$ → Si poseemos esta indeterminación al operar con funciones racionales, operamos para obtener una única fracción, para llegar a algunas de las indeterminaciones ya estudiadas anteriormente.

Veamos un ejemplo.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(4x - \frac{4x^2}{x+2}\right) = \infty - \infty$$ → Indeterminación

$$\lim_{x \to +\infty} \left(4x - \frac{4x^2}{x+2}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2 + 8x - 4x^2}{x+2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{8x}{x+2} = 8$$

Puede ocurrir que la indeterminación $\infty - \infty$ aparezca al trabajar con raíces cuadradas. En estos casos puede ser buena idea multiplicar y dividir por el conjugado.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x} - \sqrt{x+1}\right) = \infty - \infty$$ → Indeterminación

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x} - \sqrt{x+1}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x} - \sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}\right)}{\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x - x - 1}{\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}\right)} = 0$$

Hay otras indeterminaciones... que veremos más adelante en el tema, en el siguiente tema de derivadas o en el curso que viene de 2ºBachillerato.