24 11 23.

Sección 11.4

El producto vectorial de dos vectores en el espacio

Calcular u x v y probar que se es ogonal tanto a u como a v.

(11) $u = \langle 12, -3, 0 \rangle$
$v = \langle -2, 5, 0 \rangle$

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 12 & -3 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 54k = \langle 0, 0, 54$$

$$u \cdot (u \times v) = 12(0) + (-3)(0) + 0(54)$$
$$= 0 \to u \perp u \times v$$

$$v(u \times v) = -2(0) + 5(0) + 0(54)$$
$$= 0 \quad v \perp u \times v.$$

(15) $u = i + j + k, \quad v = 2i + j - k$

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2i + 3j - k = \langle -2, 3, -1 \rangle$$

$$u(u \times v) = 1(-2) + 1(3) + 1(-1)$$
$$= 0 \to u \perp u \times v$$

$$v(u \times v) = 2(-2) + 1(3) + (-1)(-1)$$
$$= 0 \to v \perp u \times v$$

$$(-v) \times (u) = -(v \times u) = u \times v.$$

(29) Calcular el área del paralelogramo que tiene los vectores dados como lados adyacentes. Usar un sistema algebraico por computadora o una herramienta de graficación para verificar el resultado.

$u = \langle 3, 2, -1 \rangle, \quad v = \langle 1, 2, 3 \rangle$

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} k$$

$$= (6-(-2))i - (9-(-1))j + (6-2)k$$

$$= (6+2)i - (9+1)j + (6-2)k$$

$$= 8i - 10j + 4k.$$

$$u \times v = \langle 8, -10, 4 \rangle$$

$$A = \|u \times v\| = \|\langle 8, -10, 4 \rangle\|$$

$$= \sqrt{(8)^2 + (-10)^2 + (4)^2}$$

$$= \sqrt{64 + 100 + 16}$$

$$= \sqrt{180}$$

$$= 6\sqrt{5}.$$

(43) Calcular $u \cdot (v \times w)$.

$u = \langle 2, 0, 1 \rangle$
$v = \langle 0, 3, 0 \rangle$
$w = \langle 0, 0, 1$.

$$u \cdot (v \times w) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (6+0+0) - (0+0+0)$$
$$= 6$$

(33) Calcular el area de un triángulo con los vértices dados. (Sugerencia: $\frac{1}{2} \| u \times v \|$ es el área del triángulo que tiene u y v como lados adyacentes.

$A(0,0,0)$, $B(1,0;3)$, $C(-3,2,0)$.

$\overline{AB} = \langle 1, 0, 3 \rangle$, $\overline{AC} = \langle -3, 2, 0 \rangle$

$$\overline{AB} \times \overline{AC} \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} k$$

$$= (0-6)i - (0-(-9))j + (2-(0))k$$
$$= -6i - 9j + 2k.$$

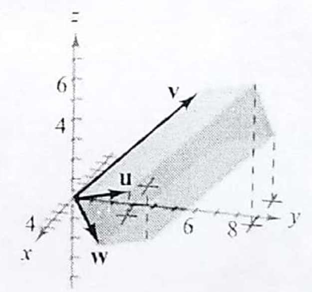
$\overline{AB} \times \overline{AC} = \langle -6, 9, 2 \rangle$

$$A = \frac{1}{2} \|\overline{AB} \times \overline{AC}\| = \left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{(-6)^2+(9)^2+(2)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{36+81+4} = \frac{\sqrt{121}}{2} = \boxed{\frac{11}{2}}$$

(46) Usar el triple producto escalar para encontrar el volumen del paralelepipedo que tiene como aristas adyacentes u, v y w.

11.4 (46)



$u = \langle 1, 3, 1 \rangle$
$v = \langle 0, 6, 6 \rangle$
$w = \langle -4, 0, -4 \rangle$

$$V = |u \cdot (v \times w)| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 6 \\ -4 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= 1\begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ -4 & -4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ -4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-24) - 3(24) + 1(24) = (-72)(-1)$$
$$= 72$$

$$V = |u \cdot (v \times w)| = \boxed{72}$$

Escaneado con CamScanner