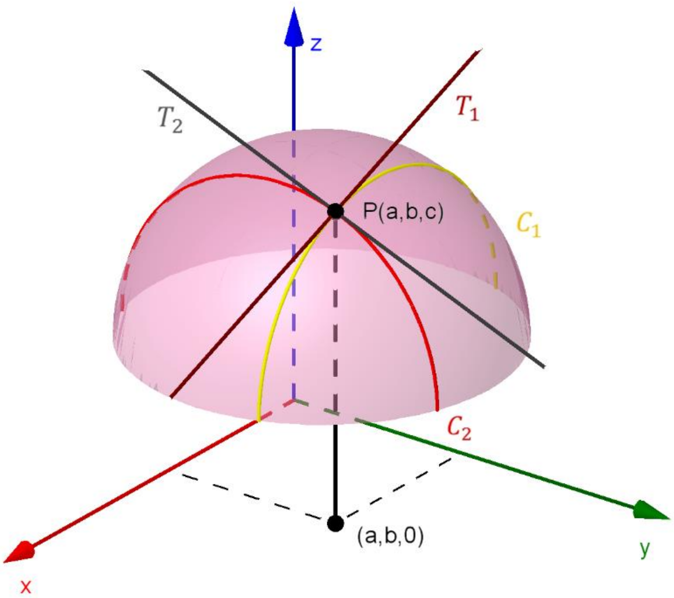
Para dar uma interpretação geométrica para as derivadas parciais, recordemos que a equação $z = f(x, y)$ representa uma superfície S. Se $f(a, b) = c$, então o ponto $P(a, b, c)$ pertence a S. Fixando o plano $y = b$, nos concentramos na curva C_1, na qual o plano vertical $y = b$ intercepta S. (Isto é, é a curva de interseção de S com o plano $y = b$.) Semelhantemente, o plano vertical $x = a$ intercepta S na curva C_2. As curvas C_1 e C_2 passam pelo ponto P. Observe que a curva C_1 é o gráfico da função $g(x) = f(x, b)$, de modo que a inclinação da tangente T_1 em P é $g'(a) = f_x(a, b)$. A curva C_2 é o gráfico da função $G(y) = f(a, y)$ assim a inclinação da tangente T_2 em P é $G'(b) = f_y(a, b)$. A figura 1 ilustra as curvas de interseção C_1 e C_2, bem como as retas tangentes (T_1 e T_2) à essas curvas.

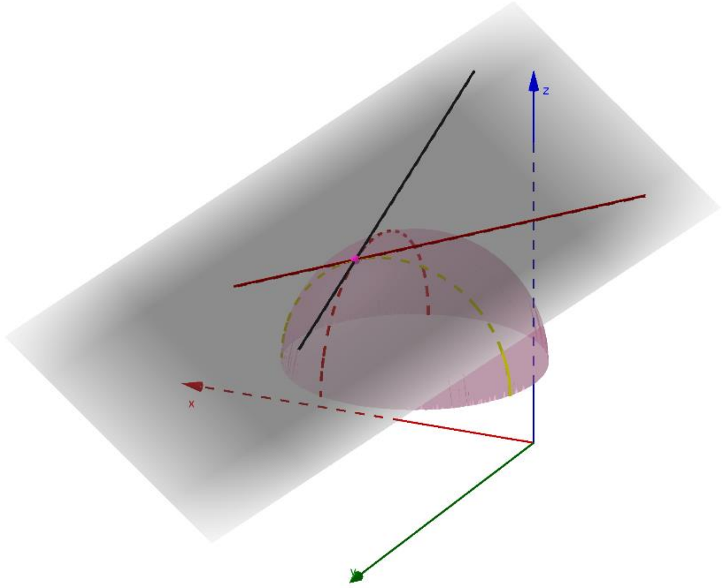
Figura 1 – Retas tangentes às curvas C_1 e C_2



Fonte: Raiane Lemke, 2017.

Suponha que a superfície S tenha equação $z = f(x, y)$, onde f tem derivadas parciais de primeira ordem contínuas, e seja $P(x_0, y_0, z_0)$ um ponto em S. Como dito anteriormente, sejam C_1 e C_2 curvas obtidas pela intersecção de S com os planos verticais $y = y_0$ e $x = x_0$. O ponto P pertence à interseção de C_1 com C_2. Sejam T_1 e T_2 as retas tangentes às curvas C_1 e C_2 no ponto P. Então, o **plano tangente** à superfície S no ponto P é definido como plano que contém as duas retas tangentes T_1 e T_2. A figura 2 mostra um plano tangente à uma superfície.

Figura 2 – Plano tangente à uma superfície



Fonte: Raiane Lemke, 2017.

Se C é uma nova curva qualquer que esteja contida na superfície S e que passe pelo ponto P, então sua reta tangente no ponto P também pertence ao plano tangente. Por isso, podemos pensar no plano tangente a S em P como o plano que contém todas as retas tangentes as curvas contidas em S que passam pelo ponto P. O plano tangente em P é o plano que melhor aproxima a superfície S perto do ponto P.

Qualquer plano passando pelo ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ tem equação da forma

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Dividindo essa equação por C e tomando $a = -A/C$ e $b = -B/C$, podemos escrevê-la como $z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0)$ [1].

Se a Equação 1 representa o plano tangente em P, sua intersecção com o plano $y = y_0$ precisar ser a reta T_1. Tomando $y = y_0$ na equação 1, obtemos $\begin{cases} z - z_0 = a(x - x_0) \\ y = y_0 \end{cases}$, que reconhecemos com a equação da reta (na forma de ponto, inclinação) com inclinação a. E de derivadas parciais sabemos que a inclinação de T_1 é $f_x(x_0, y_0)$. Desse modo, $a = f_x(x_0, y_0)$.

De modo semelhante, impondo $x = x_0$ na equação 1, obtemos $\begin{cases} z - z_0 = b(y - y_0) \\ x = x_0 \end{cases}$, que precisa representar a reta tangente T_2, logo $b = f_y(x_0, y_0)$.

Suponha que f tenha derivadas parciais contínuas. Uma equação do plano tangente à superfície $z = f(x, y)$ no ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ é dada por

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$