Exponentialgleichungen **Vergleich der Exponenten**
Arbeitsblatt

Mathematik – Sander

Lösungsstrategie

Exponentialgleichungen der Form $5^x = 5^3$ können besonders leicht gelöst werden:

$$5^x = 5^3 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3$$

Da die **Basis** der beiden Potenzen gleich ist, kann man bei dieser Exponentialgleichung die beiden **Exponenten** gleichsetzen.

Manchmal muss man Terme erst in Potenzen umwandeln, bevor diese Strategie anwendbar ist:

$$2^x = 16 \quad \Leftrightarrow \quad 2^x = 2^4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4$$

Die Strategie funktioniert auch bei komplizierteren Exponenten mit x:

$$3^{2x-4} = 81 \quad \Leftrightarrow \quad 3^{2x-4} = 3^4 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 4 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4$$

VORSICHT: Besteht eine Seite der Gleichung aus mehreren Potenzen, kann man nicht so einfach die Exponenten gleichsetzen! Warnendes Beispiel:

$$2^x + 2^x = 2^4 \quad \overset{\text{! NEIN !}}{\Longleftrightarrow} \quad x + x = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \text{ ist falsch, da } 2^2 + 2^2 = 8 \neq 2^4!$$

Musteraufgabe

$2^x \cdot 2^{x+7} = 32$	Die Strategie ist noch nicht anwendbar, da mehrere Potenzen auf einer Seite stehen.
$\Leftrightarrow 2^{x+x+7} = 32$ $\Leftrightarrow 2^{2x+7} = 32$	Potenzregel $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ anwenden
$\Leftrightarrow 2^{2x+7} = 2^5$	32 zur Potenz 2^5 umwandeln
$\Leftrightarrow 2x + 7 = 5$	**Exponentenvergleich**
$\Leftrightarrow x = -1$	Auflösen nach x
$2^{-1} \cdot 2^{-1+7} = \frac{1}{2} \cdot 2^6 = \frac{1}{2} \cdot 64 = 32$	Probe mit $x = -1$ durchführen ✓

Bitte wenden!

Aufgaben

Lösen Sie folgende Exponentialgleichungen durch „Vergleich der Exponenten“.

1) $5^{2x-3} = 5$

2) $6^{4x-5} = 216$

3) $13^{2x} \cdot 13^{-x+1} = 169$

4) $10^{x^2-2x-2} = \frac{1}{100}$

Exponentialgleichungen **Logarithmieren**
Arbeitsblatt

Mathematik – Sander

Lösungsstrategie

Die Lösung von Exponentialgleichungen der Form $a^x = b$ mit der **Basis $\boldsymbol{a}$** und dem gesuchten **Exponenten $\boldsymbol{x}$** sowie dem **Potenzwert $\boldsymbol{b}$** wird als **Logarithmus** bezeichnet und mit $\mathbf{log}$ abgekürzt:

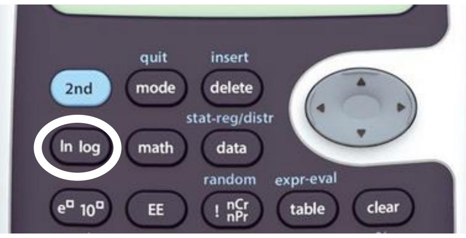
$$a^x = b \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_a(b)$$

Gesprochen: „Die Lösung x ist der **Logarithmus von $\boldsymbol{b}$ zur Basis $\boldsymbol{a}$**."

Beispiele:

a) $\log_2(16) = 4$, da $x = 4$ die Lösung von $2^x = 16$ ist ($2^4 = 16$).

b) $\log_3(5) \approx 1{,}465$, da $3^{1{,}465} \approx 5$



Vorteil: Der Logarithmus kann mit dem Taschenrechner bestimmt werden.

Um den Logarithmus $\log_3(5)$ mit Ihrem *TI-30X Plus* zu berechnen, geben Sie einfach ein:

`ln log` `ln log` `ln log` `3` `▶` `5` `enter`

Auch kompliziertere Exponentialgleichungen können mit Hilfe des Logarithmus gelöst werden:

$$7^{2x-1} = 12 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 1 = \log_7(12) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\log_7(12) + 1}{2} \approx 1{,}138$$

Musteraufgabe

$2^x \cdot 2^{x+7} = 39$	Die Strategie ist noch nicht anwendbar, da mehrere Potenzen auf einer Seite stehen.
$\Leftrightarrow 2^{x+x+7} = 39$ $\Leftrightarrow 2^{2x+7} = 39$	Potenzregel $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ anwenden
$\Leftrightarrow 2x + 7 = \log_2(39)$	**Logarithmieren**
$\Leftrightarrow x = \frac{\log_2(39) - 7}{2} \approx -0{,}857$	Auflösen nach x
$2^{-0{,}857} \cdot 2^{-0{,}857+7} = 2^{5{,}285} = 38{,}989 \approx 39$	Probe mit $x = -0{,}857$ durchführen ✓

Bitte wenden!

Aufgaben

Lösen Sie folgende Exponentialgleichungen durch „Logarithmieren“.

5) $5^x = 48\,828\,125$

6) $6^{4x-5} = 216$

7) $13^{2x} \cdot 13^{-x+1} = 169$

8) $10^{x^2-2x-2} = \frac{1}{100}$

Exponentialgleichungen Arbeitsblatt Mathematik – Sander	**Substitution**	♣

Lösungsstrategie

Komplizierte Exponentialgleichungen der Form $3^{2x} - 2 \cdot 3^x + 1 = 0$, also mit dem gesuchten x in verschiedenen Exponenten, scheinen zuerst unlösbar.

Durch eine geschickte **Ersetzung** (**Substitution**, vgl. Englisch oder Latein) kann man das Problem in manchen Fällen sehr einfach und elegant lösen:

Zuerst eine kleine Umformung: $3^{2x} = 3^{x \cdot 2} = (3^x)^2$ [Potenzregel: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$]

Die obige Gleichung lässt sich also umschreiben zu:

$$(3^x)^2 - 2 \cdot 3^x + 1 = 0$$

Ersetzt (substituiert) man nun 3^x mit einer **Hilfsvariablen $\boldsymbol{u}$**, so erhält man:

$$u^2 - 2u + 1 = 0$$

Die Lösung dieser Gleichung ist einfach (Binomische Formel oder p-q-Formel): $u = 1$

Ersetzt man nun u wieder mit 3^x (Resubstitution), so erhält man: $3^x = 1$

Die Lösung der ursprünglichen Exponentialgleichung ist also $x = 0$, da $3^0 = 1$.

Probe: $3^{2 \cdot 0} - 2 \cdot 3^0 + 1 = 3^0 - 2 \cdot 3^0 + 1 = 1 - 2 \cdot 1 + 1 = 0$ ✓

Musteraufgabe

$2^x + 2^{x+7} = 516$ $\Leftrightarrow 2^x + 128 \cdot 2^x = 516$	2^{x+7} kann zu $2^7 \cdot 2^x = 128 \cdot 2^x$ umgeformt werden (Potenzregel $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$).
$u := 2^x$ $\Rightarrow u + 128u = 516$	**Substitution** von 2^x mit u
$\Leftrightarrow 129u = 516$ $\Leftrightarrow u = \frac{516}{129} = 4$	Lösen der Gleichung für u
$\Rightarrow 2^x = 4$ $\Leftrightarrow x = 2$	**Resubstitution** und lösen der Gleichung für x
$2^2 + 2^{2+7} = 4 + 2^9 = 4 + 512 = 516$	Probe mit $x = 2$ durchführen ✓

Bitte wenden!

Aufgaben

Lösen Sie folgende Exponentialgleichungen durch „Substitution“.

9) $5^x + 5^{x+1} = 150$

10) $6^{2x} - 2 \cdot 6^x = -36$

11) $2^{2x} - 2^{x+3} + 16 = 0$

12) $10^{3x} - 10^{x+4} = 0$

Exponentialgleichungen **Grafisches Lösen**
Arbeitsblatt

Mathematik – Sander

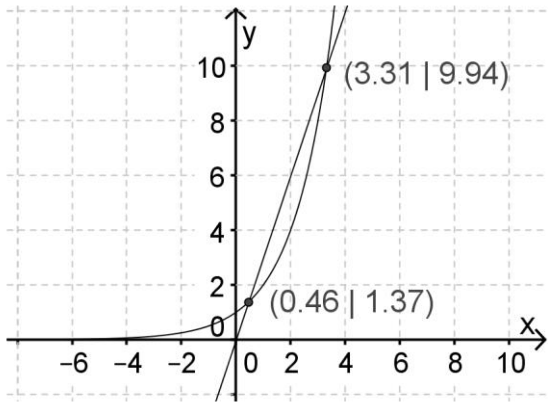
Lösungsstrategie

Exponentialgleichungen der Form $2^x = 3x$, in denen das gesuchte x sowohl im Exponenten wie auch als Basis vorkommt, sind meist nicht und nur sehr schwer algebraisch-exakt lösbar.

Ein beliebig genauer Näherungswert kann jedoch grafisch bestimmt werden:

Definiert man die linke Seite der Gleichung als Funktionsterm der Funktion $f: f(x) = 2^x$ und entsprechend die rechte Seite als $g: g(x) = 3x$, so kann man obige Gleichung als Suche nach Schnittpunkten der Graphen von f und g interpretieren:

$$f(x) = g(x)$$



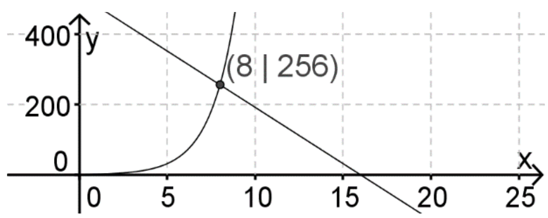
Stellt man nun die Graphen von f und g mit GeoGebra dar, so kann man die Schnittpunkte der Graphen ermitteln und erhält eben die x-Werte, für die $f(x)$ und $g(x)$ gleich sind:

$x \approx 0{,}46$ und $x \approx 3{,}31$

Probe: $2^{0,46} \approx 1{,}38$; $3 \cdot 0{,}46 = 1{,}38$ ✓

$2^{3,31} \approx 9{,}92$; $3 \cdot 3{,}31 = 9{,}93$ ✓

Musteraufgabe

$2^x + 32x = 512$ $\Leftrightarrow 2^x = -32x + 512$	Umstellen
$f: f(x) = 2^x$ $g: g(x) = -32x + 512$	**Funktionen** definieren
	Graphen der Funktionen darstellen und Schnittpunkt(e) suchen.
$\Rightarrow x = 8$	Der x-Wert des Schnittpunkts ist die Lösung.
$2^8 + 32 \cdot 8 = 256 + 256 = 512$	Probe mit $x = 8$ durchführen ✓

Bitte wenden!

Aufgaben

Lösen Sie folgende Exponentialgleichungen grafisch.

13) $5^{x} = -5x$

14) $6^{2x} + 70x = 36$

15) $2^{2x} - 2^{x+3} + 16x = 0$