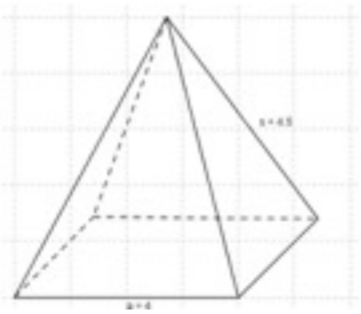
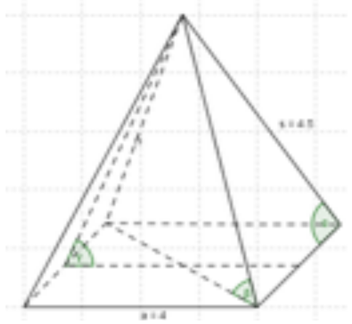
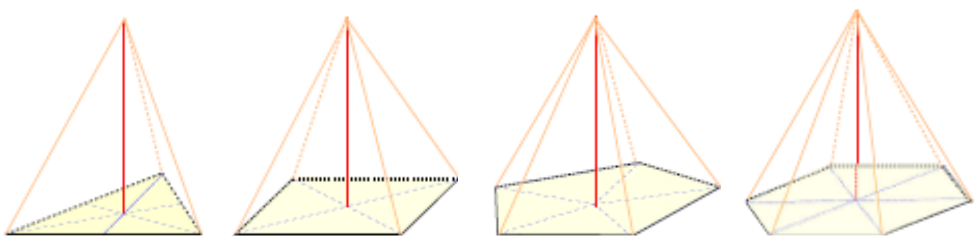
Trainingsprogramm: Berechnungen an Pyramiden

mit Musterlösungen

<u>Aufgabe 1:</u> Berechnungen an quadratischen Pyramiden

 Geg: $a = 4$ cm ; $s = 4{,}5$ cm	a) Berechne die Seitenhöhe h_s Ges.: h_s = b) Berechne die Höhe h Ges.: h = c) Berechne den Flächeninhalt der Diagonalschnittfläche Ges.: A =
 Geg: $a = 4$ cm ; $s = 4{,}5$ cm	d) Berechne die Winkel α, β, und γ α = β = γ =

<u>Aufgabe 2:</u> Berechnungen an regelmäßigen Pyramiden



Für die abgebildeten Pyramiden gilt: $a = h = 6$ cm.
Berechne für jede Pyramide die Länge der Seitenhöhe h_s.

Tipp: Zeichne jeweils das rechtwinklige Dreiecke ein!

<u>Aufgabe 3:</u>

Von einer quadratischen Pyramide sind die Länge der Grundkante $a = 6$ cm und die Länge der Seitenkante $s = 8{,}5$ cm gegeben.

Berechne das Volumen und die Oberfläche der Pyramide.

Aufgabe 4:

Von einer quadratischen Pyramide sind die Länge der Seitenhöhe h_s = 13 cm und die Oberfläche
O = 360 cm^2 gegeben.
Berechne das Volumen der Pyramide.

Skizze zu Aufgabe 5:	**Skizze zu Aufgabe 6:**	**Skizze zu Aufgabe 7:**

Aufgabe 5:

Von einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide sind die Länge der Seitenhöhe h_s = 8 cm und die Länge der Seitenkante s = 8,5 cm gegeben.

Berechne das Volumen und die Oberfläche der Pyramide.

Aufgabe 6:

Von einer regelmäßigen dreiseitigen Pyramide sind der Flächeninhalt der Grundfläche A = 6,9 cm^2 und die Länge der Seitenhöhen h_s = 5,6 cm gegeben.

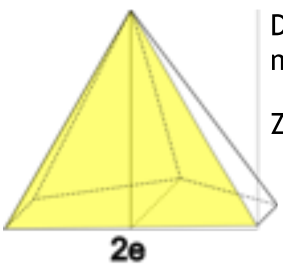
Berechne das Volumen und die Oberfläche der Pyramide.

Aufgabe 7:

Von einer regelmäßigen fünfseitigen Pyramide sind die Länge der Grundkante a= 6 cm und das Volumen V = 165 cm^3 gegeben.

Berechne die Oberfläche der Pyramide.

Aufgabe 8:



Die Schnittfläche einer Sechseckspyramide ist ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 2e.

Zeige ohne Verwendung gerundeter Werte, dass für das Volumen der Pyramide gilt: $V = 2e^3$

Lösungen

<u>Aufgabe 1:</u> Geg: a = 4 cm ; s = 4,5 cm

a) <u>Ber. von hs :</u> $h_s = \sqrt{s^2 - \frac{a^2}{4}}$ $h_s = \sqrt{4{,}5^2 - 2^2}$ $h_s \approx 4$ cm	b) <u>Ber. von h :</u> $h = \sqrt{h_s^2 - \frac{a^2}{4}}$ $h = \sqrt{4^2 - 2^2}$ $h \approx 3{,}5$ cm	c) <u>Ber. von d :</u> $d = 4\sqrt{2} = 5{,}7$ cm <u>Ber. von A :</u> $A = \frac{1}{2} \cdot 5{,}7 \cdot 3{,}5$ $A \approx 10\ cm^2$
d) $\cos\alpha = \frac{2}{4{,}5} \rightarrow \alpha \approx 64^\circ$	$\sin\beta = \frac{3{,}5}{4{,}5} \rightarrow \beta \approx 51^\circ$	$\tan\gamma = \frac{3{,}5}{2} \rightarrow \gamma \approx 60^\circ$

<u>Aufgabe 2:</u>

Dreieckspyramide

$$h_s = \sqrt{h^2 + \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{6^2 + \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{2} \cdot \sqrt{3}\right)^2} \approx 6{,}2 \text{ cm}$$

Quadratische Pyramide

$$h_s = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{6^2 + \left(\frac{6}{2}\right)^2} \approx 6{,}7 \text{ cm}$$

Fünfeckspyramide

$$h_g = \frac{\frac{a}{2}}{\tan 36^\circ} = 4{,}1 \text{ cm} \qquad h_s = \sqrt{h^2 + h_g^2} = \sqrt{6^2 + 4{,}1^2} \approx 7{,}3 \text{ cm}$$

Sechseckspyramide

$$h_s = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{6^2 + \left(\frac{6}{2} \cdot \sqrt{3}\right)^2} \approx 7{,}9 \text{ cm}$$

<u>Aufgabe 3:</u>

Ber. von hs :	Ber. von h :	Ber. von V:	Ber. von O:
$h_s = \sqrt{s^2 - \frac{a^2}{4}}$ $h_s = \sqrt{8{,}5^2 - 3^2}$ $h_s \approx 8$ cm	$h = \sqrt{h_s^2 - \frac{a^2}{4}}$ $h = \sqrt{8^2 - 3^2}$ $h \approx 7{,}4$ cm	$V = \frac{1}{3}Gh$ $V \approx \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 7{,}4$ $V \approx 88{,}8\ cm^3$	O = Grundfläche + Mantelfläche $O \approx 36\ cm^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8\ cm^2$ $O \approx 36\ cm^2 + 96\ cm^2 \approx 132\ cm^2$

Aufgabe 4:

Ber. von a :	Ber. von h:	Ber. von V:
$O = a^2 + 2ah_s$ $360 = a^2 + 26a$ $0 = a^2 + 26a - 360$ $a_{1,2} = -13 \pm \sqrt{169+360} = -13 \pm 23$ $a = 10$ cm	$h = \sqrt{h_s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$ $h = \sqrt{13^2 - 5^2}$ $h = 12$ cm	$V = \frac{1}{3}Gh$ $V = \frac{1}{3} \cdot 100 \cdot 12$ $V = 400\ cm^3$

Aufgabe 5:

Ber. von a :	Ber. von $h_{Dreieck}$:	Ber. von h:
$\frac{a}{2} = \sqrt{s^2 - h_s^2}$ $\frac{a}{2} = \sqrt{8{,}5^2 - 8^2} \approx 2{,}9$ cm $a \approx 5{,}8$ cm	$h = \frac{5{,}8}{2}\sqrt{3}$ $h \approx 5$ cm	$h = \sqrt{h_s^2 - h_d^2}$ $h = \sqrt{8^2 - 5^2}$ $h \approx 6{,}2$ cm

Ber. von O (*ohne Formel*):	Ber. von V(*ohne Formel*)::
O = Grundfläche + Mantelfläche $O \approx 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5{,}8 \cdot 5 + 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5{,}8 \cdot 8$ $O \approx 87\ cm^2 + 139{,}2\ cm^2$ $O \approx 226{,}2\ cm^2$	$V = \frac{1}{3}Gh$ $V \approx \frac{1}{3} \cdot 87 \cdot 6{,}2$ $V \approx 179{,}8\ cm^3$

Aufgabe 6:

Ber. von a :	Ber. von h :	Ber. von V:	Ber. von O:
$A = \frac{1}{2}ah_d$ $6{,}9 = \frac{1}{2}a\frac{a}{2}\sqrt{3}$ $6{,}9 = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$ $\frac{6{,}9 \cdot 4}{\sqrt{3}} = a^2$ $a \approx 4$ cm	$h = \sqrt{h_s^2 - \left(\frac{1}{3}\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2}$ $h = \sqrt{5{,}6^2 - \left(\frac{4}{6}\sqrt{3}\right)^2}$ $h \approx 5{,}5$ cm	$V = \frac{1}{3}Gh$ $V \approx \frac{1}{3} \cdot 6{,}9 \cdot 5{,}5$ $V \approx 12{,}65\ cm^3$	O = G + M $O \approx 6{,}9 + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5{,}6$ $O \approx 40{,}5\ cm^2$

Aufgabe 7:

Ber. von h_g *:	Ber. von h :	Ber. von h_s:	Ber. von O:
$h_g = \frac{\frac{a}{2}}{\tan 36°} \approx 4{,}1$ cm Ber. von G: $G = 5 \cdot \frac{1}{2} a h_g$ $G \approx 61{,}5$ cm² *h_g:Dreieckshöhe der Grundfläche*	$V = \frac{1}{3} Gh$ $165 \approx \frac{1}{3} \cdot 61{,}5 \cdot h$ $h \approx 8$ cm	$h_s = \sqrt{h^2 + h_g^2}$ $h_s = \sqrt{8^2 + 4{,}1^2}$ $h_s \approx 9$ cm	O = G + M $O \approx 61{,}5 + 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 9$ $O \approx 196{,}5$ cm²

Aufgabe 8:

Für die Grundkante a gilt:	Für die Pyramidenhöhe gilt:	Für das Volumen gilt:
$e = \frac{a}{2}\sqrt{3} \rightarrow a = \frac{2e}{\sqrt{3}}$	$h = \frac{2e}{2}\sqrt{3} = e\sqrt{3}$	$V = \frac{a^2}{2}\sqrt{3} \cdot h$ eingesetzt $V = \frac{\left(\frac{2e}{\sqrt{3}}\right)^2}{2}\sqrt{3} \cdot e\sqrt{3}$ $V = \frac{4e^2}{6} \cdot 3e = 2e^3$