Teoría – Tema 3

Teoría - 7b - ampliación a monotonía y a las diferencias entre extremo absoluto y extremo relativo

¿Son lo mismo un extremo absoluto y un extremo relativo?

La respuesta es no.

A veces coincide que un punto $x=x_0$ de un intervalo $[a,b]$ de una función $f(x)$, sea a la vez extremo relativo y absoluto en ese intervalo. Pero por lo general, no tiene por qué ser así.

Los conceptos de extremos absoluto y relativo ya los estudiamos el curso anterior, en 1ºBachillerato. Ahora vamos a insistir en sus diferencias y posibles semejanzas, ya que son conceptos que aparecen con frecuencia en los exámenes de Selectividad.

Extremo absoluto

Sea $f(x)$ una función definida en el intervalo $[a,b]$.

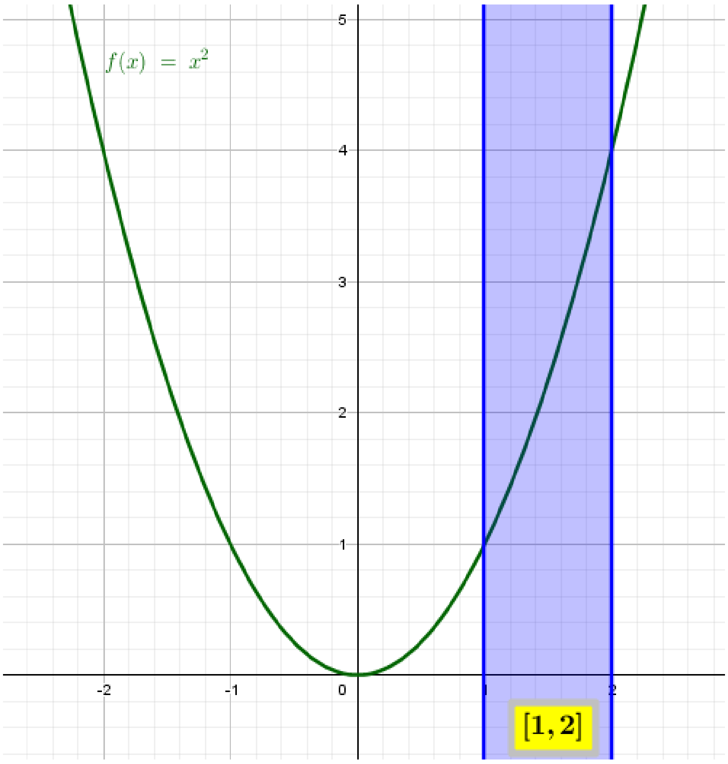
Un máximo absoluto en el intervalo $[a,b]$ es el valor de la variable $x=x_0$ donde la imagen $f(x)$ alcanza el valor más grande. Es decir: $f(x_0)\geq f(x)\ \forall\ x\in[a,b]$.

De la misma forma podemos definir un mínimo absoluto en el intervalo $[a,b]$ como el valor de la variable $x=x_0$ donde la imagen $f(x)$ alcanza el valor más pequeño. Es decir: $f(x_0)\leq f(x)\ \forall\ x\in[a,b]$.

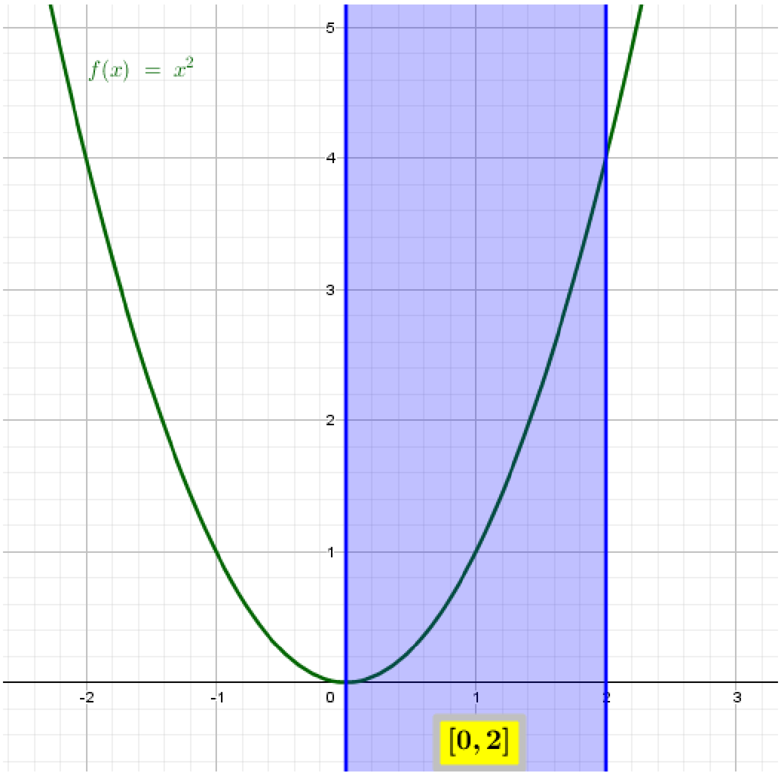
Una primera idea importante: **el estudio de los extremos absolutos suele requerir de un intervalo previo donde ser estudiados**. Puede que un valor $x=x_0$ sea extremo absoluto en un intervalo $[a,b]$ y no lo sea en otro intervalo distinto que tomemos.

Una segunda idea importante: **si deseamos determinar los extremos absolutos en toda la recta real, por norma general, debemos estudiar la forma de la gráfica en el intervalo dado**.

La función $f(x)=x^2$ en el intervalo $[1,2]$ posee un mínimo absoluto en $x=1$ y un máximo absoluto en $x=2$



Si ahora estudiamos la función $f(x)=x^2$ en el intervalo $[0,2]$ el nuevo mínimo absoluto es $x=0$ y el máximo absoluto sigue siendo $x=2$


$f(x) = x^2$
$[0, 2]$
-2
-1
0
1
2
3
4
5

Extremo relativo

Un **extremo relativo** puede ser máximo relativo o mínimo relativo, y **es un concepto propio de intervalos donde la función es derivable**. Esta es una primera diferencia respecto a los extremos absolutos, donde la función no tenía por qué ser derivable.

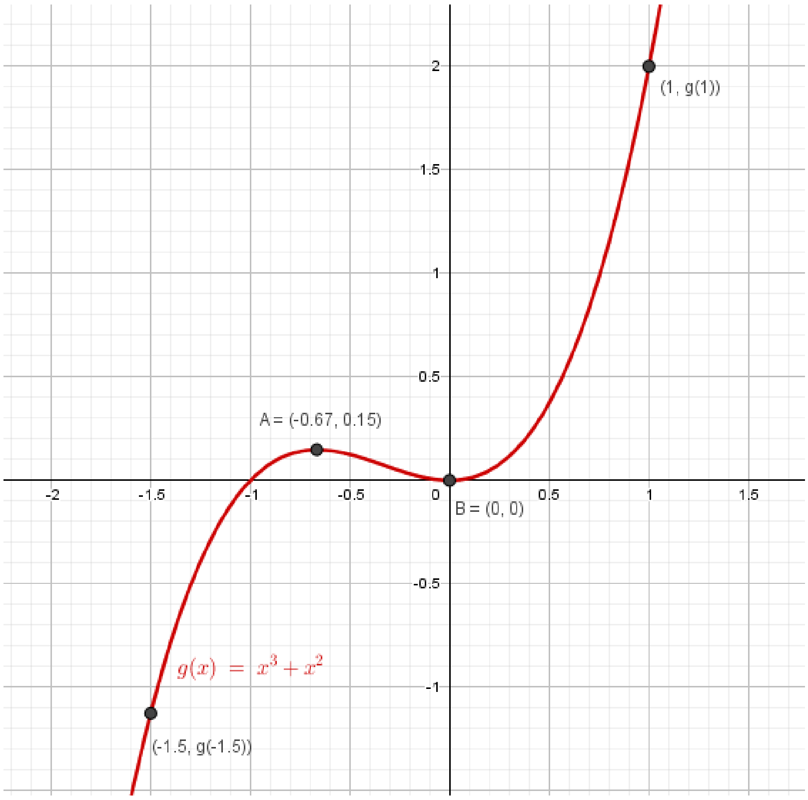
Como ya sabemos, aparece un máximo relativo siempre que haya un valor $x=x_0$ cuya imagen sea la más grande dentro de un entorno arbitrario alrededor de ese punto, y se cumpla $f'(x_0)=0$.

Aparece un mínimo relativo siempre que haya un valor $x=x_0$ cuya imagen sea la más pequeña dentro de un entorno arbitrario alrededor de ese punto, y se cumpla $f'(x_0)=0$.

Fíjate que **en los extremos relativos tomamos el intervalo arbitrario que nos de la gana alrededor de** $x=x_0$. Desde el curso pasado en 1ºBachillerato ya conocemos dos condiciones suficientes para decidir si un candidato a extremo relativo que cumple $f'(x_0)=0$ es máximo o mínimo, por lo que no vamos a incidir más en ese aspecto.

Los extremos relativos, por definición, siempre serán **puntos donde la función alcanza un máximo o un mínimo de forma suave (smooth)**, por imponer la condición de que exista la derivada en $x=x_0$ y sea igual a cero (recta tangente paralela al eje horizontal).

En $g(x)=x^3+x^2$ la primera derivada se anula en $x=-0{,}67$ (máximo relativo) y en $x=0$ (mínimo relativo) pero sus imágenes no generan un máximo absoluto ni un mínimo absoluto en su dominio



Ejemplos

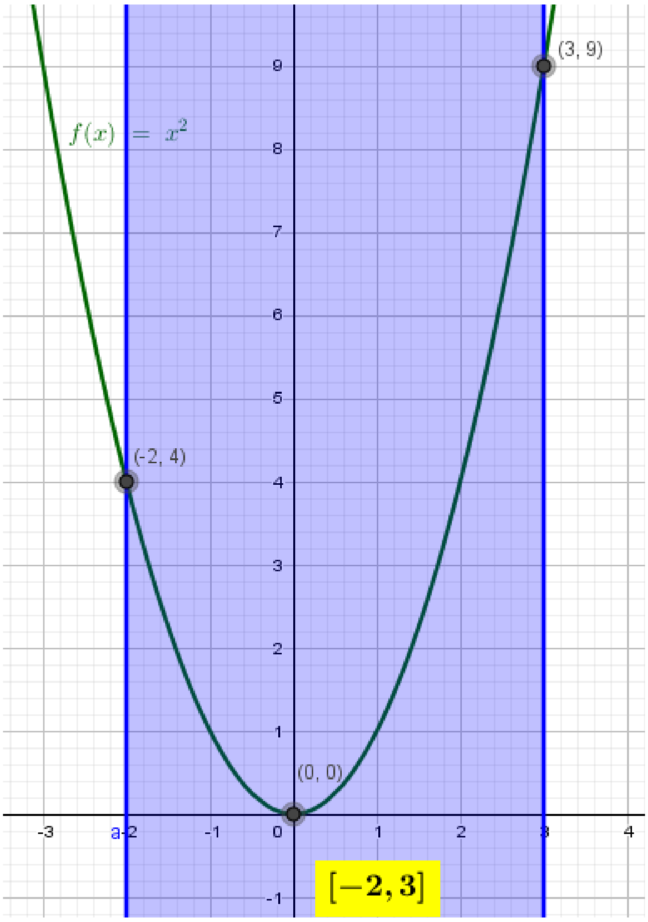
Llegados a este punto debe quedarnos claro que los candidatos a extremos relativos en un intervalo $[a,b]$ se obtienen con la condición $f'(x)=0$ y que los extremos absolutos se obtienen viendo la gráfica de la función en dicho intervalo.

En muchos ejercicios suelen coincidir los extremos absolutos y los relativos. Y eso nos llevará de forma inconsciente al siguiente error: el ejercicio nos pregunta por los extremos absolutos y lo que hacemos es estudiar los relativos y afirmar que coinciden.

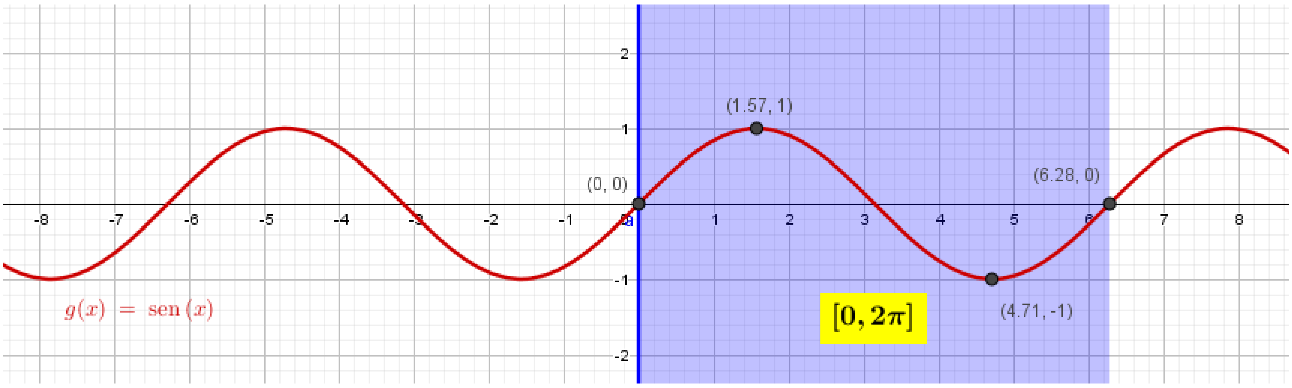
No debemos olvidar lo siguiente: **cuando nos pregunten por extremos absolutos en un intervalo $[a,b]$, además de estudiar los extremos relativos $(x_0, f(x_0))$ debemos evaluar la función en los puntos $x=a$ y $x=b$. Con los valores numéricos de $f(a)$ y de $f(b)$ podremos decidir si los extremos relativos son finalmente absolutos**.

Veamos ejemplos.

La función $f(x)=x^2$ en el intervalo $[-2,3]$ posee en $x=0$ un mínimo absoluto y relativo a la vez. Y en $x=3$ posee un máximo absoluto, pero no relativo.



La función $g(x)=sen(x)$ *en el intervalo* $[0,2\pi]$ *posee en* $x=\frac{\pi}{2}$ *un máximo absoluto y relativo. Y en* $x=\frac{3\pi}{2}$ *posee un mínimo absoluto y relativo.*



La función $h(x)=\frac{\ln(x)}{x^4}$ *en el intervalo* $[1,2]$ *posee en* $x=1{,}28$ *un máximo absoluto y relativo. Y en* $x=1$ *posee un mínimo absoluto pero no relativo.*