Problemas – Tema 8

Problemas resueltos - 2 - dominio en operaciones elementales con funciones

1. Calcula el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\sqrt{x^2+2x-3}$ **b)** $f(x)=\frac{3x-7}{x-6}$ **c)** $f(x)=x^2-4x+3$

a) $f(x)=\sqrt{x^2+2x-3}$

Necesitamos un argumento de la raíz mayor o igual a cero. Por lo tanto:

$$x^2+2x-3\geq 0$$

Resolvemos la inecuación obteniendo las soluciones del polinomio de grado dos:

$$P(x)=x^2+2x-3=0 \quad \rightarrow \quad x=-3 \quad , \quad x=1$$

Evaluamos el signo del polinomio en los siguientes intervalos.

$$(-\infty,-3) \quad \rightarrow \quad P(-10)>0$$
$$(-3,1) \quad \rightarrow \quad P(0)<0$$
$$(1,\infty) \quad \rightarrow \quad P(20)>0$$

Nos quedamos con los intervalos donde el polinomio es positivo. El dominio de la función resulta:

Dom(f) = (- ∞ , -3] U [1, ∞)

b) $f(x)=\frac{3x-7}{x-6}$

En un cociente de polinomios, el dominio son todos los reales menos los valores que anulan al denominador:

$$Dom(f)=\mathbb{R}-\{6\}$$

c) $f(x)=x^2-4x+3$

El dominio son todos los reales, por ser una función polinómica.

2. Calcula el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x)=1+\sqrt{\frac{3-x}{5-x}}$ **b)** $f(x)=\frac{1}{\sqrt{(x+1)(2x+3)}}$ **c)** $f(x)=\left\{\begin{array}{ll}\frac{2x}{x-1} & si \quad x\leq 0 \\ \sqrt{2x+1} & si \quad x>0\end{array}\right\}$

a) $f(x)=1+\sqrt{\frac{3-x}{5-x}}$

El argumento de la raíz debe ser mayor o igual a cero. Además, el denominador de la fracción no puede anularse.

$\frac{3-x}{5-x}\geq 0$ → Raíz del numerador $x=3$; Raíz del denominador $x=5$

Evaluamos la inecuación en los siguientes intervalos.

$(-\infty, 3)$ → $x=0$ → $\frac{3}{5}>0$ → Intervalo perteneciente al dominio

$(3,5)$ → $x=4$ → $\frac{3-4}{5-4}<0$ → Intervalo no perteneciente al dominio

$(5,\infty)$ → $x=10$ → $\frac{3-10}{5-10}>0$ → Intervalo perteneciente al dominio

La solución será la unión de los intervalos permitidos, incluyendo las raíces del numerador. Es decir:

$Dom(f)$ = (- ∞ , 3] U (5 , ∞)

b) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{(x+1)(2x+3)}}$

Nuevamente imponemos la condición de que el argumento de la raíz no pueda anularse. Y tampoco puede ser cero, ya que la raíz está dividiendo en la fracción.

$(x+1)(2x+3)>0$ → Raíces $x=-1$, $x=\frac{-3}{2}$

Evaluamos el argumento en los siguientes intervalos:

$(-\infty, -\frac{3}{2}) \rightarrow x=-10 \rightarrow (-10+1)(2(-10)+3)>0$ → intervalo perteneciente al dominio

$(\frac{-3}{2}, -1) \rightarrow x=\frac{-5}{4} \rightarrow (\frac{-5}{4}+1)(2(\frac{-5}{4})+3)<0$ → intervalo no perteneciente al dominio

$(-1,\infty) \rightarrow x=0 \rightarrow (0+1)(2(0)+3)>0$ → intervalo perteneciente al dominio

Solución final → $Dom(f)=(-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (-1, \infty)$

c) $f(x)=\left\{ \begin{matrix} \frac{2x}{x-1} & si & x\leq 0 \\ \sqrt{2x+1} & si & x>0 \end{matrix} \right\}$

Debemos estudiar el dominio de la función en cada tramo.

Para $x<0 \rightarrow f(x)=\frac{2x}{x-1}$ es una función continua salvo en $x=1$. Pero ese valor no pertenece al intervalo $x<0$ → La función es continua para todo valor $x<0$.

Para $x>0 \rightarrow f(x)=\sqrt{2x+1}$ es una función con discriminante positivo, ya que para $x>0$ el argumento $2x+1$ siempre es positivo → La función es continua para todo valor $x>0$.

Además, en $x=0$ la función está definida (no confundir estar definida con ser continua).

Conclusión: La función es continua en toda la recta real.

3. Razona de manera justificada el dominio de la siguientes funciones.

a) $f(x)=\ln(\sqrt{x}-1)$ **b)** $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{(x-2)(x-3)}}$ **c)** $f(x)=\dfrac{x}{\cos(x)}$

a) La raíz cuadrada solo admite discriminantes nulos o positivos. Mientras que el logaritmo solo admite argumentos positivos. Por lo tanto:

$$Dom(\sqrt{x}-1)=\mathbb{R}^{+}\cup\{0\} \quad \rightarrow \quad Dom(\ln(\sqrt{x}-1))=(1,+\infty)$$

b) La raíz cuadrada solo admite discriminantes nulos o positivos. Y un cociente de polinomios no está definido en aquellos puntos que anulan el denominador. Por lo tanto:

$$Dom\left(\frac{x-1}{(x-2)(x-3)}\right)=\mathbb{R}-\{2,3\}$$

$$\frac{x-1}{(x-2)(x-3)}\geq 0 \quad si \quad x\geq 1 \quad y \quad x\notin[2,3] \quad \rightarrow \quad Dom\left(\sqrt{\frac{x-1}{(x-2)(x-3)}}\right)$$ = [1, 2) U (3, $+\infty$)

c) La función coseno se anula periódicamente en $x=\ldots,\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2},\ldots$. Por lo tanto:

$$Dom\left(\frac{x}{\cos(x)}\right)=\mathbb{R}-(2\cdot k+1)\frac{\pi}{2},\quad k\in\mathbb{Z}$$

4. Justificar razonadamente el dominio y la imagen de la función $f(x)=\left|\frac{x-2}{x+1}\right|$

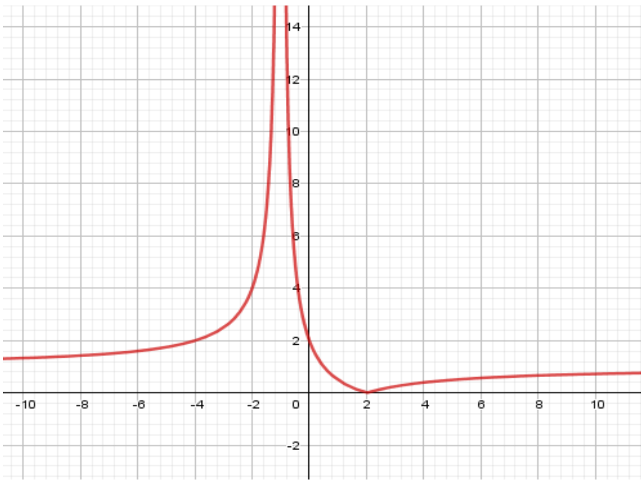
Para calcular el dominio de la función tendremos que calcular previamente los puntos donde no está definida la función, es decir, los puntos que anulan el denominador por ser un cociente de polinomios. El valor absoluto no afecta en nada al dominio de la función.

$$x+1=0 \quad \rightarrow \quad x=-1 \quad \rightarrow \quad D_f=R-\{-1\}$$

Para estimar la imagen de la función tenemos que averiguar el conjunto de valores que toma la función al sustituir x por cualquier numero, excepto en $x=-1$ donde la función no está definida y tiene una asíntota vertical.

Como la función aplica el valor absoluto a un cociente de polinomios, y en el límite de x tendiendo a -1 (por la izquierda y por la derecha) la función tiende a infinito, sabemos seguro que la imagen llega hasta más infinito a la izquierda y a la derecha de $x=-1$.

Por otra parte la función se anula en $x=2$. Por lo tanto, la imagen toma el valor 0 . De esta forma concluimos que la imagen oscila en el intervalo [0, +∞).



5. Determinar, de manera razonada, el dominio de $f(x)=\sqrt{x^2-5x+4}-x$

El dominio de la función serán todos los valores de x que no hagan negativo el discriminante de la raíz. Es decir: $x^2-5x+4\geq 0$

Factorizamos el polinomio de grado dos: $(x-1)(x-4)\geq 0$

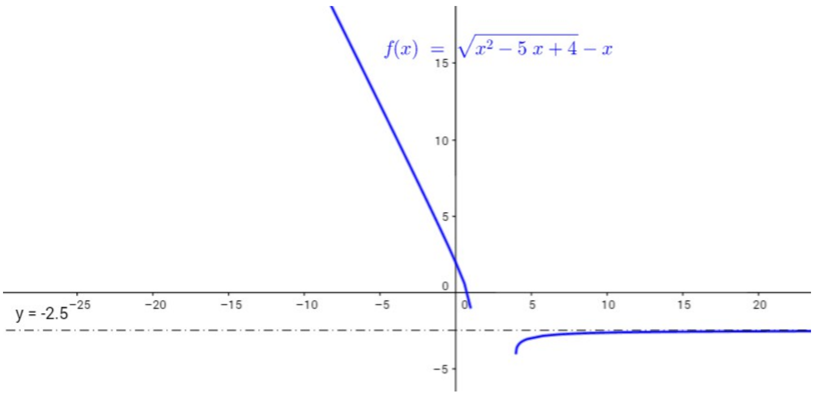
Evaluamos en cada intervalo para saber dónde se cumple la desigualdad.

$(-\infty,1)$ → $x=-10$ --> $(x-1)(x-4)>0$ → Sí se cumple la desigualdad

$(1,4)$ → $x=2$ --> $(x-1)(x-4)<0$ → No se cumple la desigualdad

$(4,+\infty)$ → $x=10$ --> $(x-1)(x-4)>0$ → Sí se cumple la desigualdad

Por lo tanto el dominio de la función resulta ($-\infty$, 1] U [4, $+\infty$).



6. Indica si hay alguna simetría en la función y calcula su dominio.

$$g(x)=\frac{x^4-1}{2x}$$

el dominio de un cociente de polinomios es igual a todos los números reales salvo los que anulan al denominador. Por lo tanto:

$$Dom(g)=\mathbb{R}-\{0\}$$

Las funciones simétricas pares se caracterizan por → $g(x)=g(-x)$

Sustituimos.

$$g(-x)=\frac{(-x^4)-1}{-2x}$$

$$g(-x)=\frac{x^4-1}{-2x}\neq g(x)=\frac{x^4-1}{2x}$$ → La función no es par

Las funciones simétricas impares se caracterizan por → $g(x)=-g(-x)$

Sustituimos.

$$-g(-x)=-\left(\frac{x^4-1}{-2x}\right)=\frac{-x^4+1}{-2x}=\frac{x^4-1}{2x}$$ → La función si tiene simetría impar

7. Calcula el dominio y el recorrido.

$$f(x)=\begin{pmatrix} 2x-1 & si \quad x<0 \\ 2x-3 & si \quad x>2 \end{pmatrix}$$

Realizamos una tabla de valores para dibujar la función (que son rectas, polinomios de primer grado):

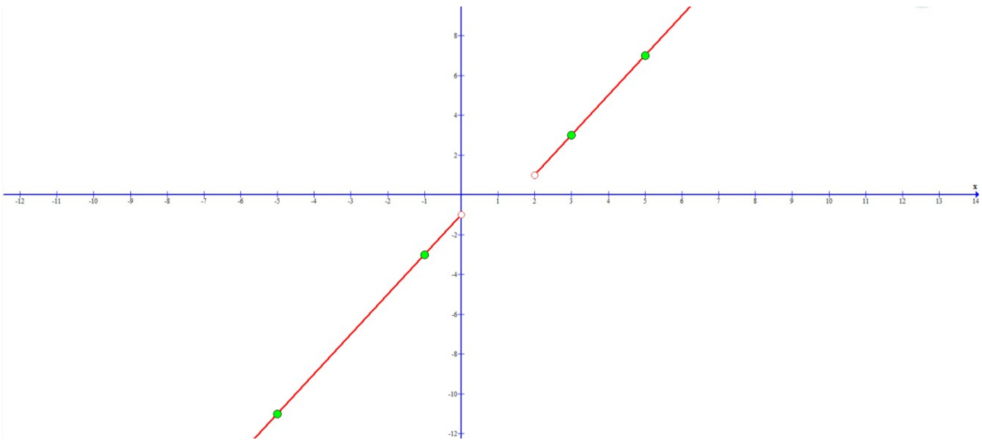
$f(x)=2x-1 \qquad si \quad x<0$

x	y
-1	-3
-5	-11

$f(x)=2x-3 \qquad si \quad x>2$

x	y
3	3
5	7

Representamos gráficamente las dos funciones, recordando que en $0<x<2$ la función no está definida. Comprobamos que $Dom(f)=(-\infty,0)\cup(2,\infty)$ y $Recorrido(f)=(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$.



8. Sea la función $f(x)=\ln(x^3-4x)$ **.**

a) Determina el dominio de la función.

El argumento del logaritmo debe ser positivo, ya que el logaritmo no está definido para argumentos negativos ni nulos.

$x^3-4x>0 \;\rightarrow\; x(x^2-4)>0 \;\rightarrow\; x(x+2)(x-2)>0$

Estudiamos el signo del miembro a la izquierda de la inecuación en los intervalos formados por la solución del polinomio.

$(-\infty,-2) \;\rightarrow\; x=-10 \;\rightarrow\; -10(-10+2)(-10-2)<0$

$(-2,0) \;\rightarrow\; x=-1 \;\rightarrow\; -1(-1+2)(-1-2)>0$ → Pertenece al dominio

$(0,2) \;\rightarrow\; x=1 \;\rightarrow\; 1(1+2)(1-2)<0$

$(2,+\infty) \;\rightarrow\; x=10 \;\rightarrow\; 10(10+2)(10-2)>0$ → Pertenece al dominio

Es decir:

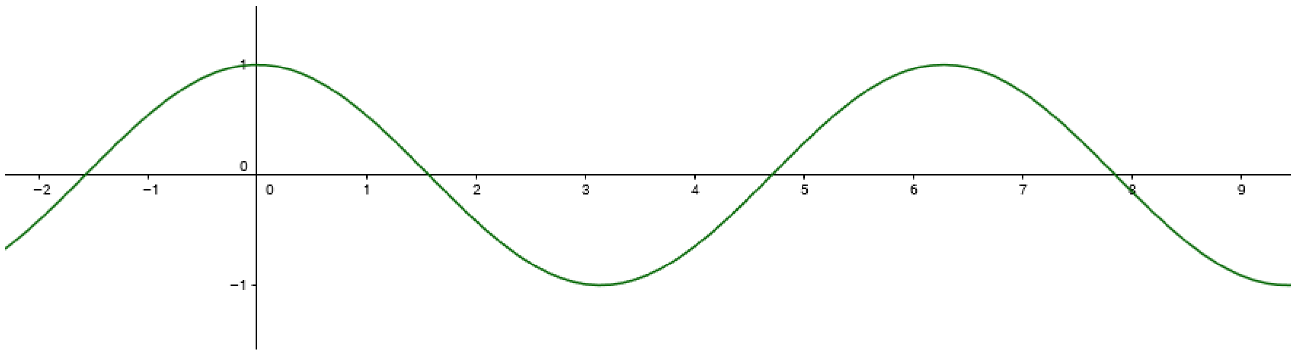
$Dom(f)=(-2,0)\cup(2,+\infty)$

9. Obtener el dominio de $f(x)=\ln(\cos(x))$ **en el intervalo** $[0,2\pi]$ **.**

La **función logaritmo** está correctamente definida siempre que su **argumento sea positivo**. Por lo que planteamos la siguiente desigualdad estricta (que no incluye al signo igual).

$$\cos(x)>0$$

Recordando la gráfica de la función coseno es muy fácil determinar los intervalos donde la función es positiva dentro de $[0,2\pi]$.



Viendo la gráfica concluimos:

$$Dom(f)=[0,\pi/2)\cup(3\pi/2,2\pi]$$

¿Qué gráfica de funciones elementales es bueno tener siempre en mente? **Logaritmo, exponencial, seno, coseno, tangente, rectas crecientes/decrecientes, parábolas cóncavas/convexas, raíz cuadrada y** x^3 .

Recordando que si a una función le sumamos una cantidad $k>0$ lo que hacemos es desplazar su gráfica k unidades hacia arriba. SI le restamos una cantidad $k>0$ lo que hacemos es desplazar su gráfica k unidades hacia abajo.

De la misma forma $f(x-k)$ desplaza la gráfica $f(x)$ un total de k unidades hacia la derecha. Y $f(x+k)$ desplaza la gráfica $f(x)$ un total de k unidades hacia la izquierda.