Gonio-meditace

Sinus a kosinus součtu

Žán Pól Kastról

23. ledna 2022

1 Vzorce

Každej blbec ví, že existují následující vzorce, které platí pro **všechna reálná** α a β:

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta} \tag{1}$$

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} \tag{2}$$

$$\boxed{\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta} \tag{3}$$

$$\boxed{\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta} \tag{4}$$

Vzniká otázka, jak se tyto vztahy dají dokázat.

2 Planimetrický důkaz – Hokusaiův obdélník

Vztahy (3) a (4) dostaneme z prvních dvou jednoduše substitucí $\beta \mapsto -\beta$. Proto stačí dokázat jen vztahy (1) a (2).

Díky periodicitě stačí pro hodnoty α a β uvažovat jen interval $\langle 0; 2\pi)$. Součet $\alpha+\beta$ potom leží v intervalu $\langle 0; 4\pi)$.

2.1 Důkaz spec. případů

Speciální případy vzniknou, pokud ve vzorcích (3) a (4) dostaneme pro sinus nebo kosinus hodnoty 0 či ± 1. Pač ve vzorcích je α rovnocenné β, stačí uvažovat jen podmínky pro α a pro $\alpha+\beta$.

Je nutné **rozlišit následující případy pro** α:

1. $$\alpha = 0 \to \sin\alpha = 0;\ \cos\alpha = 1$$

2. $$\alpha = \pi \to \sin\alpha = 0;\ \cos\alpha = -1$$

3. $$\alpha = \frac{\pi}{2} \to \sin\alpha = 1;\ \cos\alpha = 0$$

4. $$\alpha = \frac{3\pi}{2} \to \sin\alpha = -1;\ \cos\alpha = 0$$

Dále je nutné **uvažovat následující případy pro** $\alpha + \beta$:

5. $$\alpha + \beta = 0 \to \sin(\alpha+\beta) = 0;\ \cos(\alpha+\beta) = 1$$

   Z toho, že $\alpha + \beta = 0$ dále plyne, že

   $$\alpha = \beta = 0$$

6. $$\alpha + \beta = \pi \to \sin(\alpha+\beta) = 0;\ \cos(\alpha+\beta) = -1$$

   Z toho, že $\alpha + \beta = \pi$ dále plyne, že $\beta = \pi - \alpha$, pročež

   $$\sin\beta = \sin\alpha \qquad \cos\beta = -\cos\alpha$$

7. $$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \to \sin(\alpha+\beta) = 1;\ \cos(\alpha+\beta) = 0$$

   Z toho, že $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ dále plyne, že $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, pročež

   $$\sin\beta = \cos\alpha \qquad \cos\beta = \sin\alpha$$

8. $$\boxed{\alpha + \beta = \frac{3\pi}{2} \to \sin(\alpha+\beta) = -1; \ \cos(\alpha+\beta) = 0}$$

Z toho, že $\alpha + \beta = \frac{3\pi}{2}$ dále plyne, že $\beta = \frac{3\pi}{2} - \alpha$, pročež

$$\boxed{\sin\beta = -\cos\alpha} \quad \boxed{\cos\beta = -\sin\alpha}$$

Dosazením do levých a pravých stran obou vzorců se snadno přesvědčíme, že levé strany se rovnají pravým.

Speciální případy pro hodnoty $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ úhlů α, β a $\alpha+\beta$ máme dokázané. V dalším předpokládejme, že úhly α, β a $\alpha+\beta$ již těchto hodnot nenabývají. Jinými slovy pro α a β uvažujme již pouze vnitřky 4 kvadrantů, tedy intervaly

$$\left(0; \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right), \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right), \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right).$$

2.2 Případ $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$

Důkaz je zřejmý z obrázku 1 a z ještě zřejmější díky apletu v GeoGebře – viz odkaz v popisu obrázku. Tento případ můžeme zakódovat jako [111], což znamená, že úhly $[\alpha, \beta, \alpha+\beta]$ leží všechny v **prvním kvadrantu**.

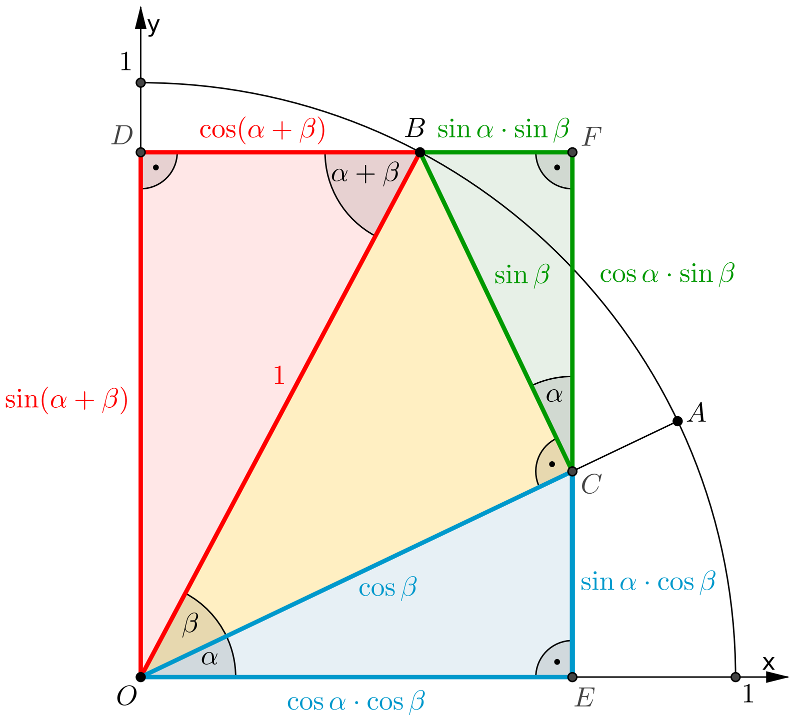
V obrázku máme tzv. HOKUSAIŮV[1] obdélník $OEFD$, který je rozdělen na čtyři pravoúhlé trojúhelníky.

Platnost vztahů (1) a (2) je dána rovností protilehlých stran v obdélníku:

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}$$

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$$

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Hokusai



Obr. 1: [111]

https://www.geogebra.org/m/hkmtuewq

2.3 Další případy

Je zřejmé, že zvětšíme-li dostatečně úhly α a β, jejich součet již nepadne do prvního, ale může ležet v kterémkoli dalším kvadrantu. Když o tom budeme trochu přemýšlet, přijdeme na to, že existuje celkem **dvacet** možností, jak navolit hodnoty α a β. Přitom existuje 5 možností, kdy $\alpha + \beta$ padne do 1. kvadrantu, 5 možností pro 2. kvadrant atd. Krástně to máme v následujícím schématu:

kvadr. pro $\alpha + \beta$					
1	[111]	[141]	[231]	[241]	[331]
2	[112]	[122]	[242]	[332]	[342]
3	[123]	[133]	[223]	[343]	[443]
4	[134]	[144]	[224]	[234]	[444]

V obrázku 2 máme další čtyři příklady konfigfurace úhlů $\alpha, \beta, \alpha + \beta$ (v popisu obrázku je opět odkaz na aplety v GeoGebře).

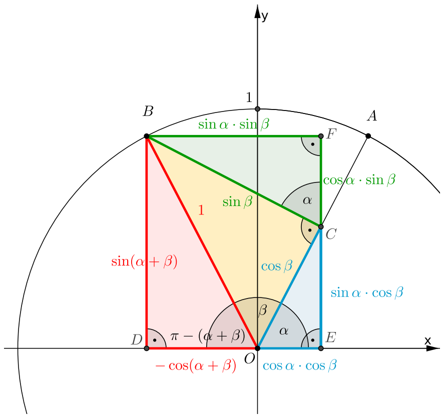
Princip důkazu je pořád stejný jako v případě [111]. Vytvoříme opět Hokusajův obdélník se čtyřmi vepsanými trojúhelníky, ve kterých se objevují vedle úhlů $\alpha, \beta, \alpha + \beta$ také jejich doplňky do π a podobně.

Například v případě [112] (obr.2a) máme ve žlutém trojúhelníku BCO úhel u vrcholu O nikoliv β, ale $\pi - \beta$. Proto strana OC bude $\cos(\pi - \beta) = -\cos\beta$. Dále máme v červeném trojúhelníku BOD úhel u vrcholu B nikoliv $\alpha + \beta$, ale $\pi - (\alpha + \beta)$. Proto strana BD bude $\cos(\pi - (\alpha + \beta)) = -\cos(\alpha + \beta)$.

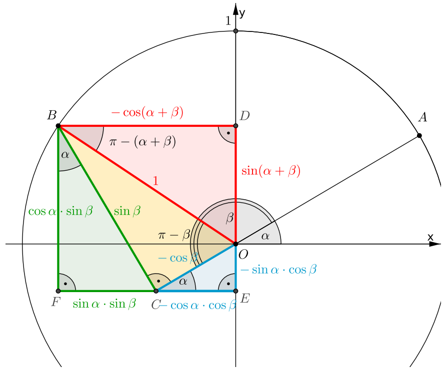
3 Analytický důkaz – Hirošigeho rotace

Díky periodicitě stačí opět pro hodnoty α a β uvažovat jen interval $\langle 0; 2\pi)$.

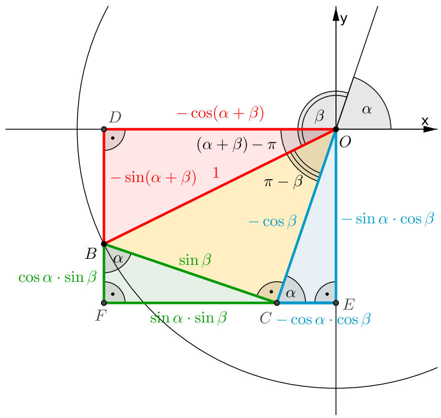
Nejprve dokážeme vztah (4) pro **kosinus rozdílu**.



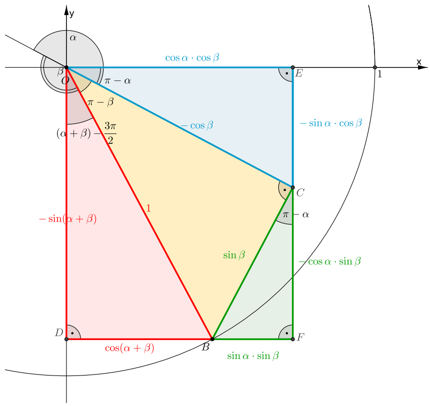
(a) [112]



(b) [122]



(c) [123]



(d) [224]

Obr. 2:

https://www.geogebra.org/m/ygn5rkcq

3.1 Důkaz vztahu pro kosinus rozdílu

Důkaz je založen na analytickém vztahu pro výpočet délky úsečky pomocí souřadnic jejích krajních bodů a na faktu, že délka úsečky nezávisí na volbě vztažné soustavy.

Pro $\alpha = \beta$ vztah platí, o čemž se snadno přesvědčíme dosazením. Levá strana vztahu dává $\cos(\alpha - \beta) = \cos 0 = 1$. Pravá strana dává $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$.

Také pro α nebo β nulové vztah platí. Opět můžeme dosadit a přesvědčit se o tom (to už si zkus sama).

Můžeme tedy dále uvažovat již jen případ $\alpha \neq \beta; \alpha \in (0; 2\pi); \beta \in (0; 2\pi)$. Předpokládejme nejprve, že $\alpha > \beta$.

Čummež na obrázek 3a, kde máme Jednotkovu kružnici se středem O a souřadnou soustavu Oxy. Na kružnici máme dva body A a B, kterým přísluší orientované úhly α a β.

Dle definice goniometrických funkcí jsou souřadnice bodů A, B:

$$\boxed{A[\cos\alpha; \sin\alpha]; \quad B[\cos\beta; \sin\beta]}$$

Tím pádem pro délku d úsečky AB platí:

$$d^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2$$
$$d^2 = \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta$$

Odtud vzhledem k tomu, že součet druhých mocnin sinu a kosinu nějakého úhlu je roven jedné:

$$\boxed{d^2 = 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)} \qquad (5)$$

Čummež nyní na obr.3b, kde jsme **otočili souřadnou soustavu**[2] kolem počátku O o orientovaný úhel β a dostali jsme modrou soustavu $Ox'y'$. V ní jsou souřadnice bodů A, B jiné:

$$\boxed{A[\cos(\alpha-\beta);\sin(\alpha-\beta)];\quad B[1;0]}$$

Pročež pro délku d úsečky AB platí:

$$d^2 = (\cos(\alpha-\beta)-1)^2 + \sin^2(\alpha-\beta)$$
$$d^2 = \sin^2(\alpha-\beta) + \cos^2(\alpha-\beta) - 2\cos(\alpha-\beta) + 1$$

Odtud vzhledem k tomu, že součet druhých mocnin sinu a kosinu nějakého úhlu je roven jedné:

$$\boxed{d^2 = 2 - 2\cos(\alpha-\beta)} \tag{6}$$

Srovnáním vztahů (5) a (6) dostáváme vztah (4) pro kosinus rozdílu, který jsme chtěli dokázat.

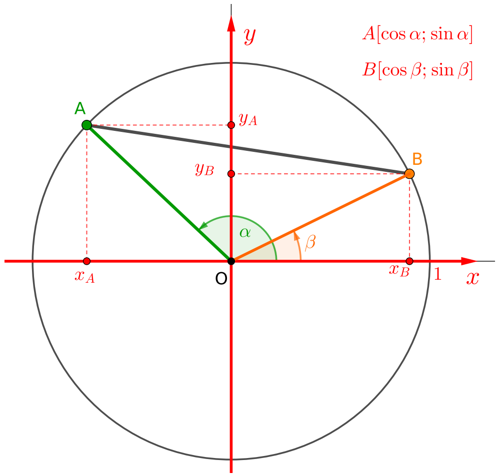
Předpokládali jsme, že $\alpha > \beta$. Pro případ $\alpha < \beta$ však vztah (4) bude platit také, protože funkce kosinus je **sudá**, takže

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(-(\beta-\alpha)) = \cos(\beta-\alpha)$$

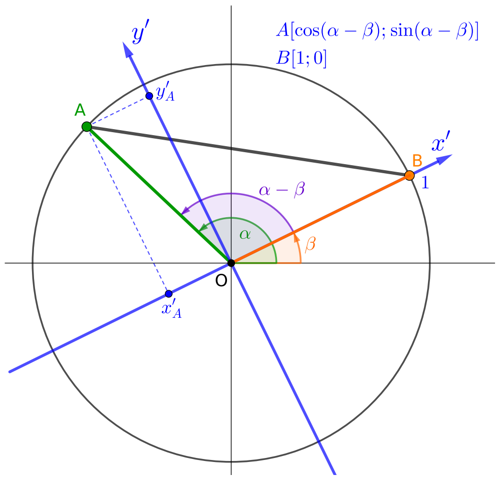
a protože $\beta > \alpha$, můžeme pro $\cos(\beta-\alpha)$ použít dokázaný vztah a máme opět

$$\boxed{\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}$$

[2]tzv. Hirošigeho rotace – https://en.wikipedia.org/wiki/Hiroshige



(a) Souřadnice bodů A, B v červené soustavě souřadnic Oxy



(b) Souřadnice bodů A, B v modré soustavě souřadnic $Ox'y'$

Obr. 3: Hirošigeho rotace SOSO

https://www.geogebra.org/m/unggqdy8

3.2 Důkaz vztahu pro sinus rozdílu

Pač sinus je jen posunutej kosinus:

$$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

platí

$$\sin(\alpha - \beta) = \cos\left((\alpha - \beta) - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\alpha - \left(\beta + \frac{\pi}{2}\right)\right) \tag{7}$$

Nyní použijeme dokázaný vztah pro kosinus rozdílu:

$$\cos\left(\alpha - \left(\beta + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \cos\alpha \underbrace{\cos\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right)}_{-\sin\beta} + \sin\alpha \underbrace{\sin\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right)}_{\cos\beta} \tag{8}$$

Srovnáním (7) a (8) dostáváme

$$\boxed{\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}$$

3.3 Důkaz pro sinus a kosinus součtu

Máme-li dokázané vztahy pro sinus a kosinus rozdílu, stačí využít sudosti a lichosti:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin(\alpha - (-\beta)) \\ &= \sin\alpha\cos(-\beta) - \cos\alpha\sin(-\beta) \\ &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

A podobně:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha - (-\beta)) \\ &= \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta) \\ &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$