Teoría – Tema 2

Teoría - 1 - función biyectiva y existencia de inversa

Función, dominio e imagen

Una función real $f(x)$ de variable real x en un intervalo $I \in \mathbb{R}$ es una regla que asigna a cada valor $x \in I$ un único número real $f(x) \in C$, siendo $C \in \mathbb{R}$.

$$f : I \rightarrow C$$

Si obtenemos todos los pares de valores $(x, f(x))$ obtenemos la gráfica de la función.

El **dominio** de la función $D(f)$ es el conjunto $I \in \mathbb{R}$ de todos los puntos a los que puedo aplicar la función.

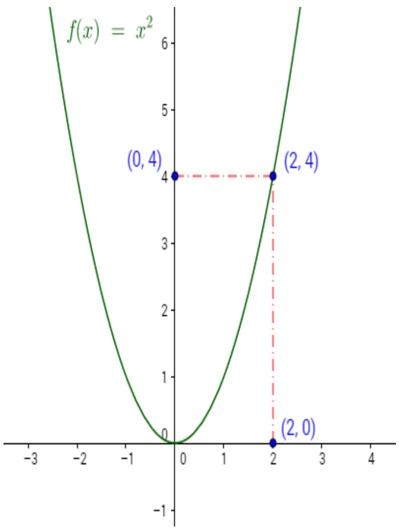
Para cada x obtenemos un único valor $f(x)$, llamado imagen del valor real x . El conjunto formado por todas las imágenes de todos los puntos del dominio $D(f)$ es la imagen de la función $f(x)$.

La **imagen** de una función también se denomina **recorrido** o **codominio**. La imagen depende del conjunto de valores sobre los que aplicamos inicialmente la función.

$f(x)=x^2 : \mathbb{R} \rightarrow$ [0, +∞) → Dominio: todos los reales. Imagen: reales positivos más el cero

$f(x)=x^2 : [0,2] \rightarrow [0,4]$ → Dominio: $[0,2]$. Imagen: $[0,4]$

Importante: cuando un problema ofrece una función, puede que nos indique un dominio y una imagen que no coincidan con el dominio más grande posible ni con la imagen más grande posible. Debes leer con atención los enunciados para comprender qué dominio e imagen estamos considerando.



Es decir, además de conocer la forma explícita de una función $f(x)$ debemos conocer el intervalo sobre el que se aplica para saber cuál será su correspondiente imagen.

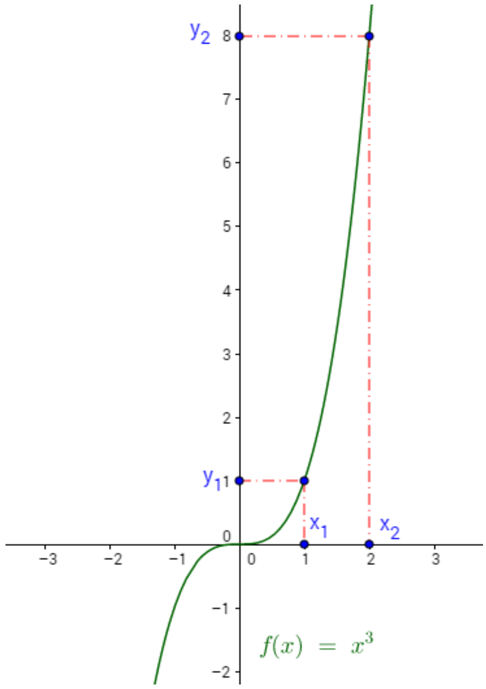
A dominios distintos, tendremos imágenes distintas. Si no nos especifican el dominio de la función, supondremos que éste es el mayor dominio posible (en el ejemplo anterior, $f(x)=x^2$ tiene como mayor dominio posible $\mathbb{R}$).

La imagen generada por el mayor dominio posible de la función se llama **imagen maximal**, o recorrido maximal, o codominio maximal (en el ejemplo anterior, $f(x)=x^2$ tiene como codominio maximal todos los reales positivos más el cero).

Función inyectiva

Una función real $f(x)$ de variable real x en un intervalo $I \in \mathbb{R}$ es inyectiva si para toda pareja de valores $x_1 \in I$ y $x_2 \in I$ siempre tenemos imágenes distintas, es decir, $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Por ejemplo, la función $f(x)=x^3$ es inyectiva en toda la recta real.



Ser inyectiva es una propiedad de los valores del dominio de la función.

Vamos a reflexionar un poco más sobre este detalle.

Puede ocurrir que una función sea inyectiva en un intervalo y no en otro.

Por ejemplo, $g(x)=x^2$ es inyectiva en el intervalo $(0,+\infty)$, pero no es inyectiva si consideramos como intervalo toda la recta real (ya que un valor de la imagen $g(x)$ puede tener asociado más de un valor real x del dominio).

Geométricamente podemos afirmar que **una función es inyectiva en su dominio si cualquier recta horizontal que podamos trazar corta, como máximo, una única vez a la función**.

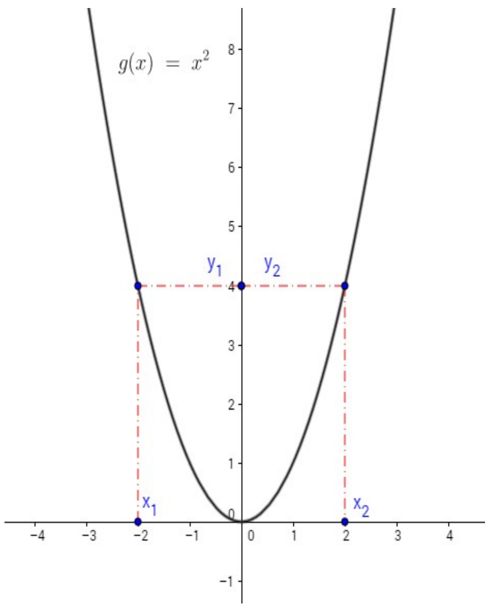
¿Cómo podemos demostrar analíticamente que una función es inyectiva? Por reducción al absurdo.

Partimos de dos valores del dominio $x_1 \neq x_2$ y suponemos que las imágenes son iguales, es decir, suponemos que $f(x_1)=f(x_2)$. Si al aplicar esta igualdad llegamos a un absurdo, diremos que la hipótesis de partida es falsa y las imágenes serán distintas, por lo que la función es inyectiva.

Ejemplo 1 resuelto

Demostrar analíticamente que $f(x)=x+3$ es inyectiva para $x \in \mathbb{R}$.

Partimos de dos valores arbitrarios $x_1 \neq x_2$ y suponemos $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1+3=x_2+3$ → $x_1=x_2$ → Esto es un absurdo porque hemos partido de $x_1 \neq x_2$ → Absurdo matemático → La hipótesis de partida es falsa → $f(x_1) \neq f(x_2)$ → La función es inyectiva para $x \in \mathbb{R}$.



Función sobreyectiva

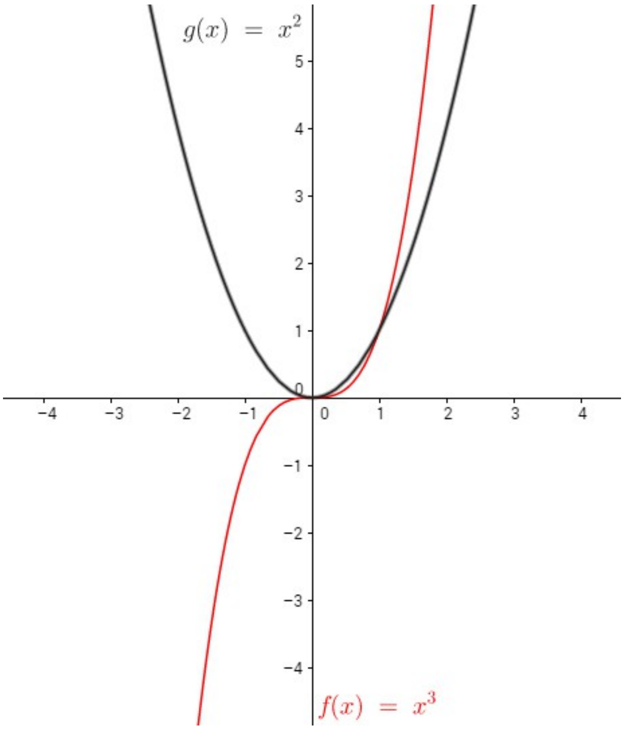
Una función real $f(x): I \rightarrow C$ de variable real x es sobreyectiva si para cual valor de la imagen $y \in C$ siempre existe un valor del dominio asociado a ese valor de la imagen, es decir, $\exists x \in I / f(x) = y$.

Ser sobreyectiva es una propiedad de los valores de la imagen de la función. De esta forma, una función puede ser sobreyectiva en un codominio y no serlo en otro codominio.

$f(x) = x^3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *es sobreyectiva en el codominio* $\mathbb{R}$

$g(x) = x^2 : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ *es sobreyectiva en el codominio* $(0, \infty)$

$g(x) = x^2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *no es sobreyectiva en el codominio* $\mathbb{R}$



¿Como demostrar de manera sencilla si una función es sobreyectiva? Recordando el concepto de imagen maximal, como la imagen generada por el mayor dominio posible de la función.

Una función será sobreyectiva si la imagen para la que se define es un subconjunto de la imagen maximal. Por ejemplo, $g(x) = x^2 : \mathbb{R} \rightarrow [0,3]$ es sobreyectiva porque su imagen maximal es [0, +∞) y se cumple $[0,3] \subset [0, +\infty)$.

Función biyectiva y existencia de inversa

Una función $f(x)$ es biyectiva si es, a la vez, inyectiva y sobreyectiva.

Ser biyectiva garantiza la existencia de función inversa $f^{-1}(x)$, que satisface la relación:

$$(f\circ f^{-1})(x)=(f^{-1}\circ f)(x)=x$$

El dominio de $f(x)$ es la imagen de la función inversa $f^{-1}(x)$. Y la imagen de $f(x)$ se convierte en el dominio de la función inversa $f^{-1}(x)$.

Como vimos en 1º de Bachillerato, si una función admite inversa, podemos obtener la expresión de la función inversa $f^{-1}(x)$ despejando de $f(x)=y$ la variable independiente x , para realizar posteriormente un cambio de variable $x\leftarrow\rightarrow y$.

Ejemplo 2 resuelto

Obtener, si es posible, la función inversa de $y=2x-3$.

La función $f(x)=2x-3:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ es biyectiva, por ser a su vez inyectiva y sobreyectiva.

Es inyectiva porque cualquier recta horizontal corta, como máximo, una única vez a la recta oblicua $y=2x-3$.

Y es sobreyectiva porque el codominio maximal de la función son todos los reales.

Por lo tanto la función es biyectiva y admite función inversa. Para obtenerla damos los siguientes pasos:

Despejamos la variable x $\rightarrow$ $x=\frac{y+3}{2}$.

Intercambiamos la notación de las variables $\rightarrow$ $y=\frac{x+3}{2}$.

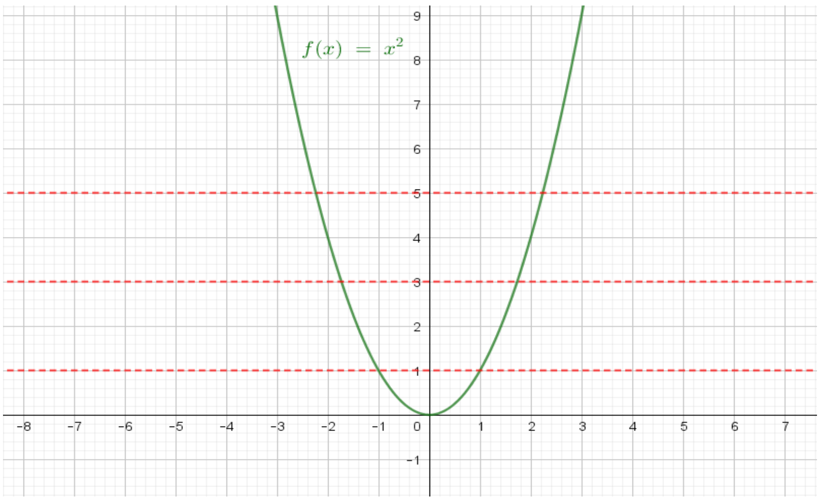
La función inversa resulta $f^{-1}(x)=\frac{x+3}{2}$. Comprobamos que cumple las siguientes condiciones:

$$(f\circ f^{-1})(x)=x \quad\rightarrow\quad f\left(\frac{x+3}{2}\right)=2\cdot\frac{x+3}{2}-3=x+3-3=x$$

$$(f^{-1}\circ f)(x)=x \quad\rightarrow\quad f^{-1}(2x-3)=\frac{(2x-3)+3}{2}=\frac{2x}{2}=x$$

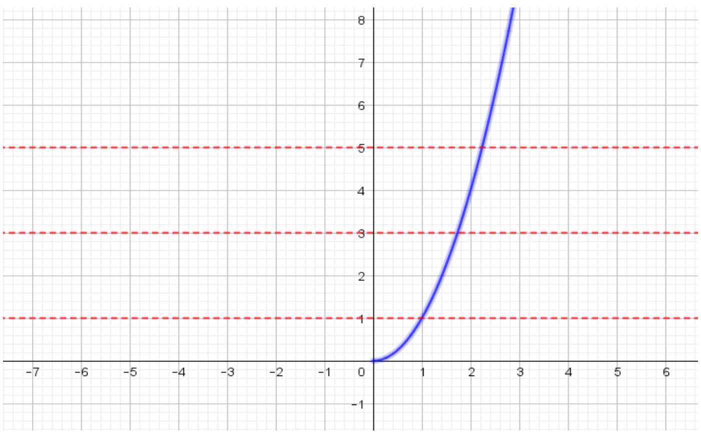
Ejemplo de función que no es biyectiva en su dominio maximal pero sí es biyectiva si seleccionamos adecuadamente el intervalo de definición del dominio

Sea la función parábola $f(x)=x^2$. Todos sabemos que su dominio maximal (el mayor posible) es toda la recta real. Si dibujamos la función en su dominio maximal, vemos claramente que la función no es inyectiva ya que hay líneas horizontales que cortan a la gráfica en más de un punto.



Y si la función no es inyectiva, no será biyectiva y en consecuencia no admitirá inversa. Pero todos sabemos desde tiempos inmemoriales que la parábola cancela con la función raíz cuadrada. Parábola y raíz cuadrada son funciones inversas. ¿Cómo es esto posible si hemos dicho que la parábola no admite inversa?

Muy sencillo. Debemos definir la función parábola en el intervalo $[0,\infty)$. En ese dominio, solo tendremos una rama de la parábola y las rectas horizontales cortarán a la gráfica una única vez como máximo.



En el dominio $[0,\infty)$ la función parábola es inyectiva. Además, también es sobreyectiva en la imagen $[0,\infty)$ (recuerda que la imagen son los valores que toma el eje vertical).

Recuerda: Inyectiva + Sobreyectiva = Biyectiva

Y una función biyectiva admite inversa. Y esta inversa es simétrica respecto a la bisectriz del primer y tercer cuadrante. Esa idea es importante: **una función y su inversa se reflejan respecto a la recta** $y=x$ (esta bisectriz también se llama función identidad).

Fíjate en la última gráfica cómo la gráfica de la parábola y de la raíz cuadrada son simétricas respecto a la recta $y=x$, siempre que consideremos el dominio $[0,\infty)$ para la función parábola.