Teoría – Tema 2

Teoría - 4 - ampliación al concepto de asíntotas

Asíntotas horizontales y oblicuas en más y en menos infinito.

Al estudiar A.H. o bien A.O. debemos considerar siempre el comportamiento de la variable independiente en más y en menos infinito. En un cociente de polinomios la A.H. en más infinito coincide siempre con la A.H. en menos infinito. Lo mismo ocurre en un cociente de polinomios con la A.O. (si indicamos esta frase en un examen, nos evitamos tener que hacer explícitamente los límites en menos infinito).

Pero ojo. Este razonamiento solo sirve en cociente de polinomios. En el momento que aparezca un valor absoluto, una raíz, un logaritmo o una exponencial, debemos hacer los dos límites: tanto en más infinito como en menos infinito.

¿Recuerdas cómo realizar un límite en menos infinito? Cambiando la variable x por $-x$ y cambiando $-\infty$ por $+\infty$ al operar en el límite.

Ejemplo 1 resuelto

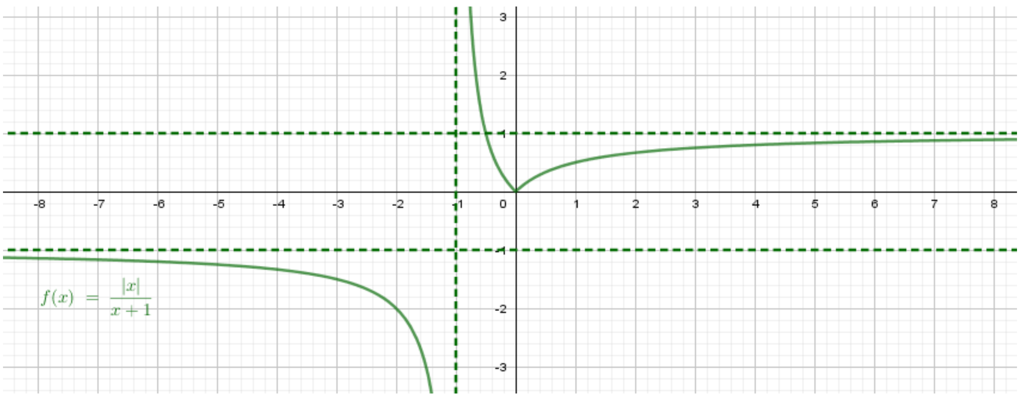
Calcular A.H. de $f(x)=\dfrac{|x|}{x+1}$

Primero rompemos el valor absoluto → $f(x)=\begin{cases} \dfrac{-x}{x+1} & si\ x\leq 0\ y\ x\neq -1 \\ \dfrac{x}{x+1} & si\ x>0 \end{cases}$

Al obtener la A.H. debemos plantear límite tanto en más como en menos infinito. Usando en cada límite la forma adecuada de la función.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x+1}=1$ → A.H. $y=1$ si $x\to+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x}{x+1}=cambios=\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{-x+1}=-1$ → A.H. $y=-1$ si $x\to-\infty$



Ejemplo 2 resuelto

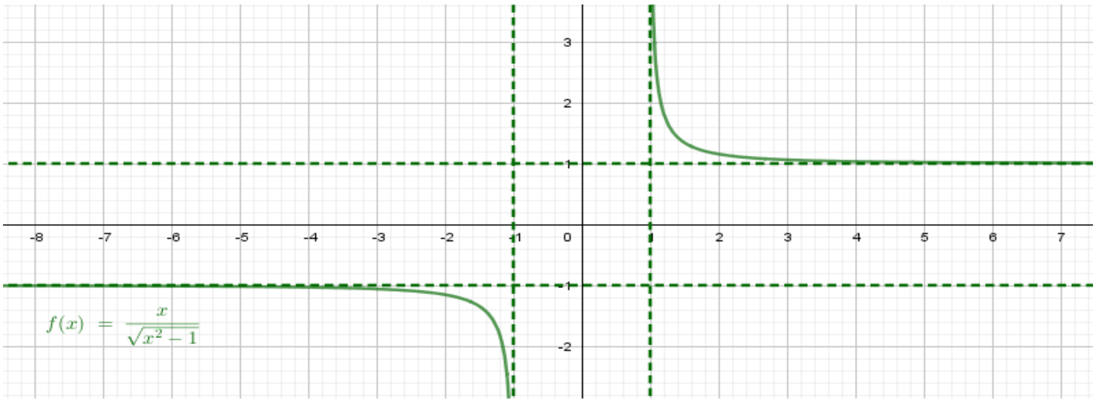
Calcular A.H. de $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=L'\,Hôpital\ \ entra\ \ en\ \ bucle=Dividir\ \ por\ \ máxima\ \ potencia\to Límite=1$$

A.H. $y=1$ si $x\to+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=cambios=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{\sqrt{(-x)^2-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2-1}}=-1$$

A.H. $y=-1$ si $x\to-\infty$



Ejemplo 3 resuelto

Calcular A.H. de $f(x)=\frac{1}{\ln(x)}$

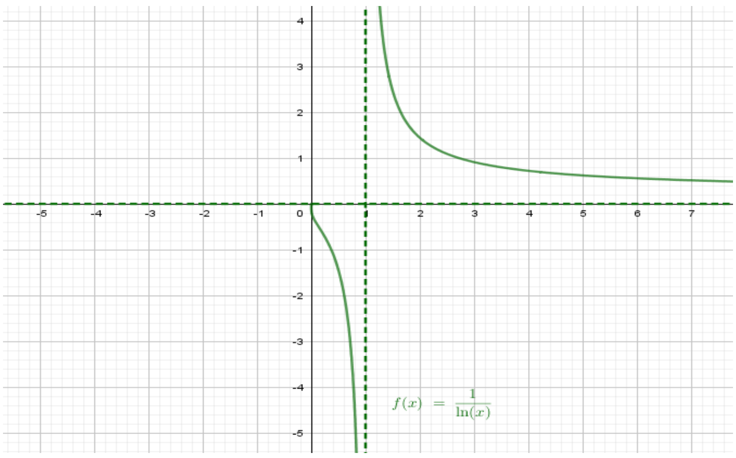
$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln(x)}=\frac{1}{\infty}=0$ A.H. $y=0$ si $x\to+\infty$

El dominio de la función es:

$Dom(f)=(0,1)\cup(1,\infty)$

Solo existe el logaritmo de números positivos y el denominador se anula en $x=1$.

Por lo tanto, no tiene sentido preguntarnos por la A.H. en menos infinito ya que la función no está definida para esos valores.

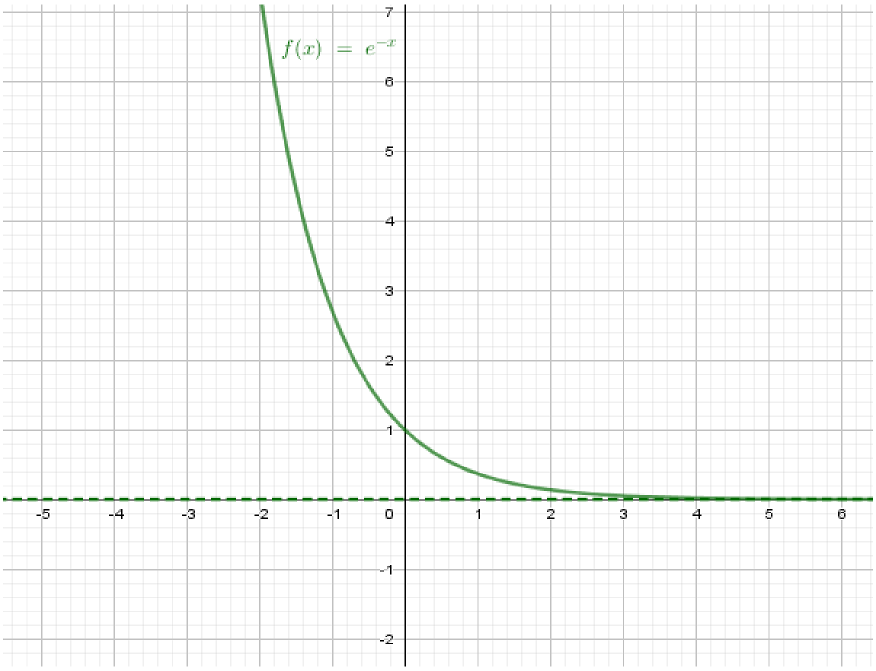


Ejemplo 4 resuelto

Calcular A.H. de $f(x)=e^{-x}$

$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=\frac{1}{\infty}=0$ → A.H. $y=0$ si $x\to+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} e^{-x}=cambios=\lim_{x\to+\infty} e^{x}=\infty$ → No existe A.H. si $x\to-\infty$



¿Cómo entender la función seno y coseno en el infinito?

La función seno y la función coseno tienen su imagen acotada al intervalo $[-1,1]$.

Da igual el valor x que tomemos: siempre se cumple que $-1 \leq sen(x) \leq 1$ y $-1 \leq \cos(x) \leq 1$.

¿Y si x tiende a más o a menos infinito?

$$¿\lim_{x \to \pm\infty} sen(x)?$$
$$¿\lim_{x \to \pm\infty} \cos(x)?$$

El límite no converge a un valor concreto, sino que tomará un valor finito comprendido en el intervalo de acotación [-1, 1].

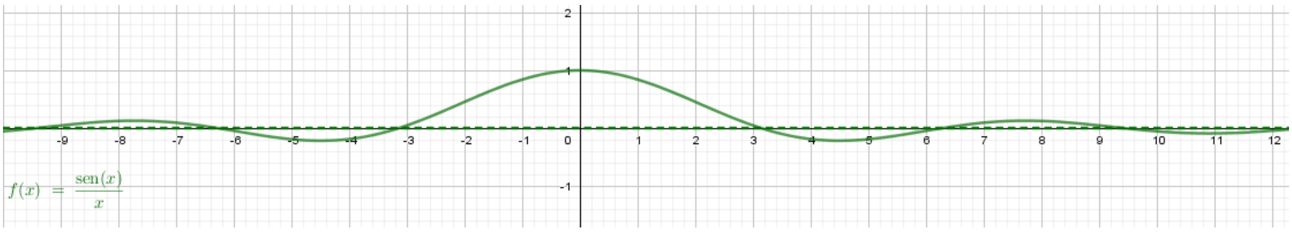
Conclusión: **no sabemos cuánto vale el seno o el coseno en el infinito, pero sabemos que será un número comprendido entre -1 y 1.**

Ejemplo 5 resuelto

Calcular $\lim_{x \to +\infty} \frac{sen(x)}{x}$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{sen(x)}{x} = \frac{k}{\infty}$ → Donde k es un número acotado entre -1 y 1.

Y un número dividido por infinito tiende a cero → $\lim_{x \to +\infty} \frac{sen(x)}{x} = \frac{k}{\infty} = 0$ → A.H. $y=0$ si $x \to +\infty$



Ejemplo 6 resuelto

Calcular $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{\cos(x)}$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{\cos(x)}=cambios=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x}}{\cos(-x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x\cdot\cos(-x)}=\frac{1}{\infty\cdot k}$$

k es un número acotado entre -1 y 1 → Infinito por un número da infinito

$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x\cdot\cos(-x)}=\frac{1}{\infty\cdot k}=\frac{1}{\infty}=0$ → A.H. $y=0$ si $x\to-\infty$