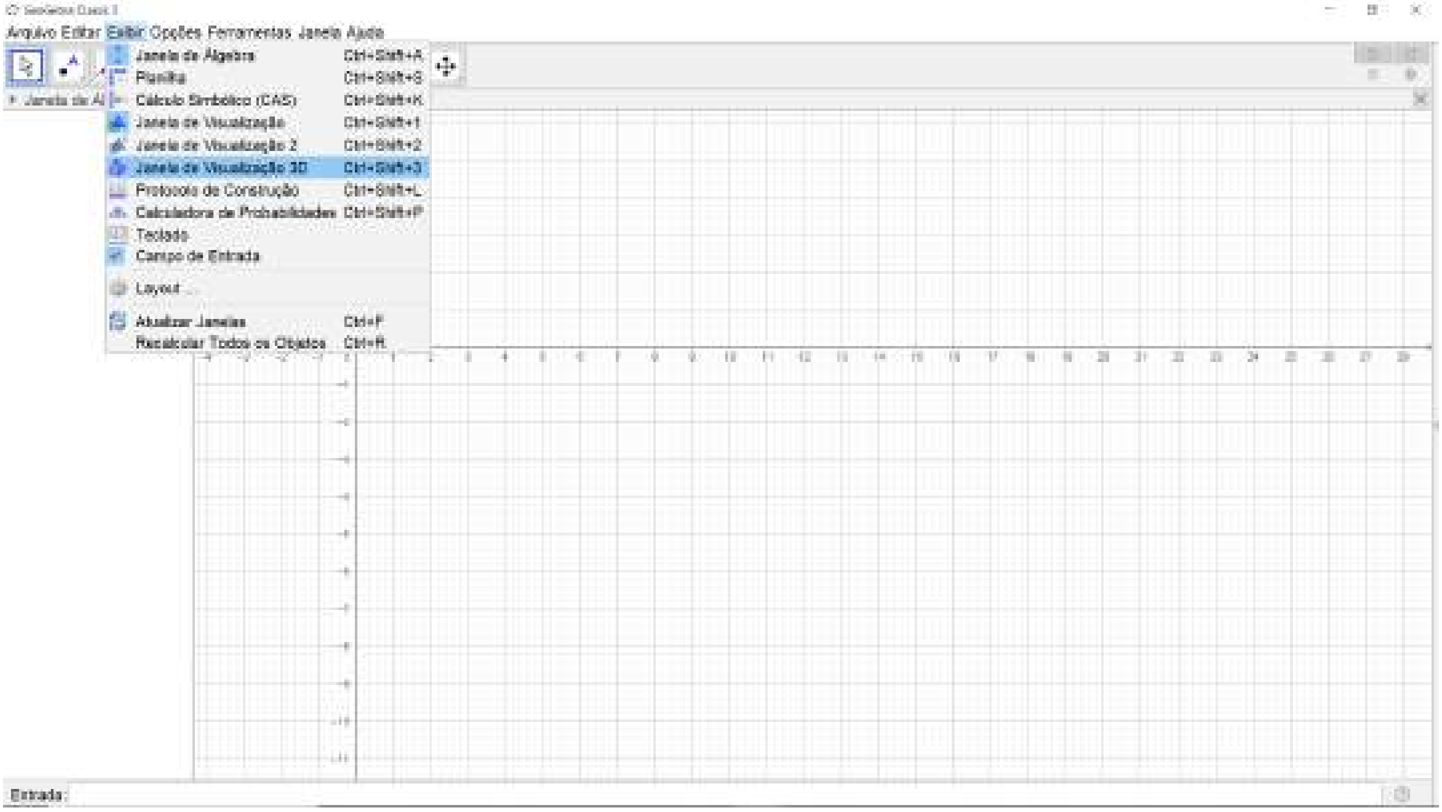
Roteiro para a Oficina 8 – Arte em Movimento: girando curvas para obter superfícies

O que tem de novo nesta oficina:

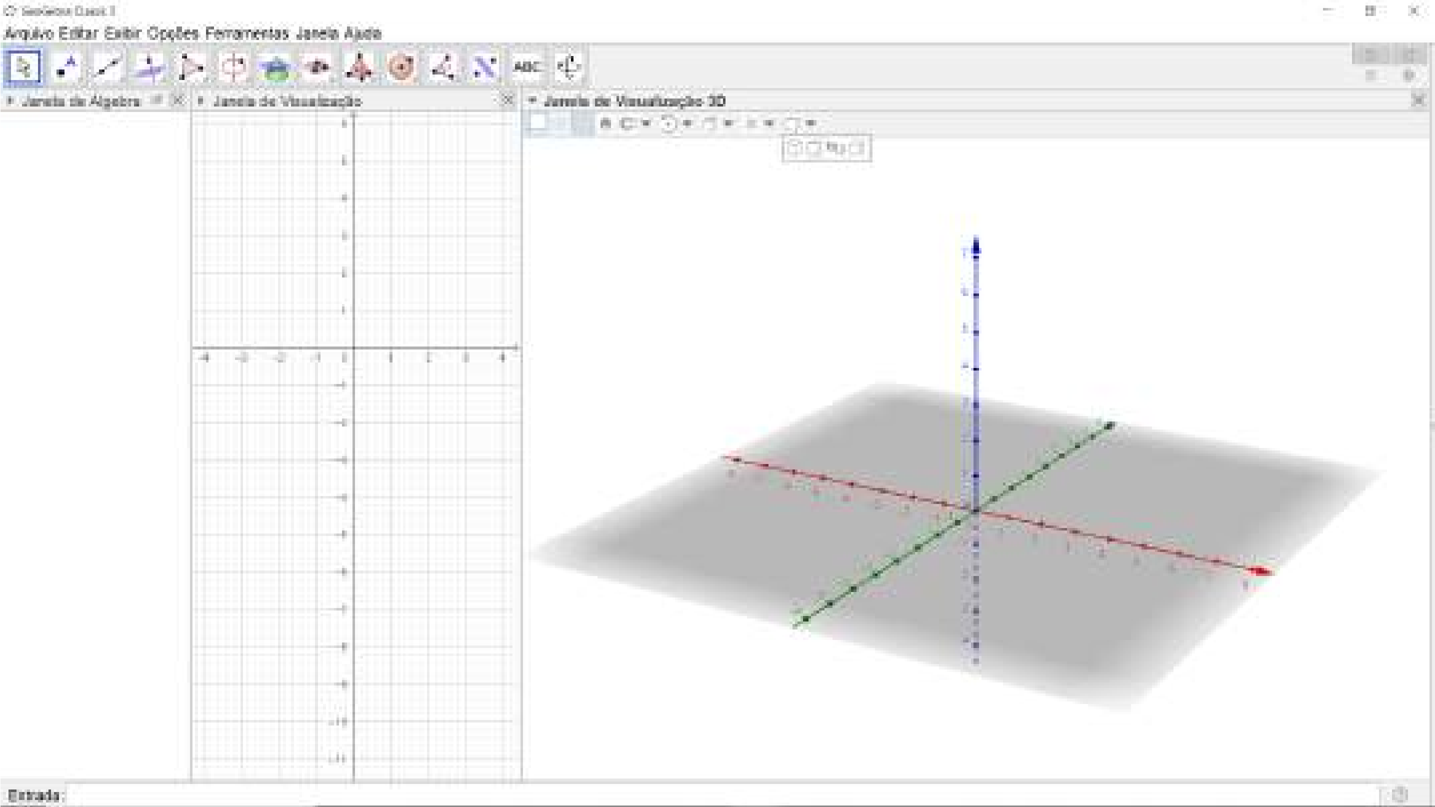
- *Parametrização de Curvas no espaço cartesiano.*
- *Superfícies de Revolução e Teoremas de Pappus-Guldin.*
- *Caixas de entrada para pontos, vetores e funções.*

PARTE 1

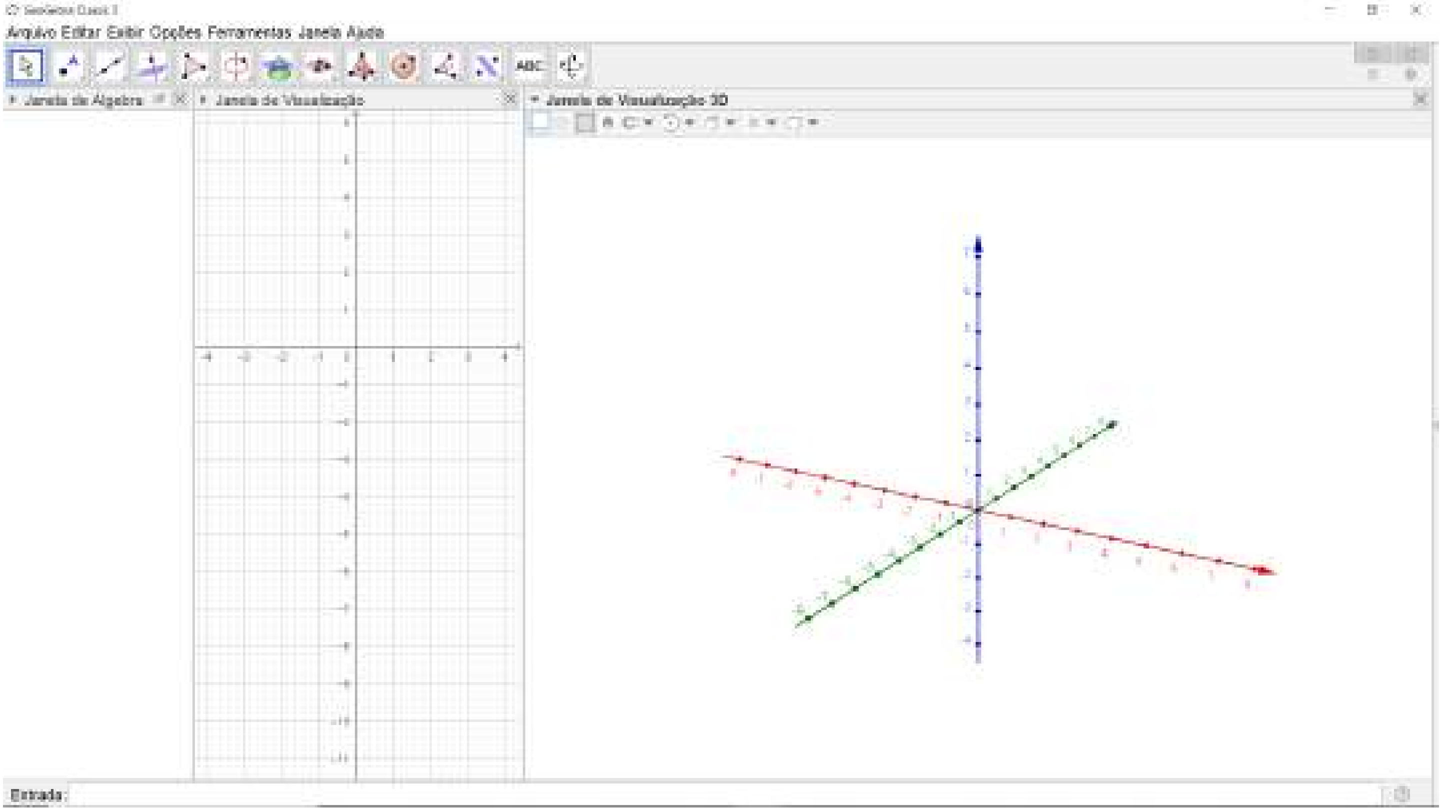
(1) Abra o GeoGebra, acesse o menu "*Exibir*" e clique o item "*Janela de Visualização 3D*".



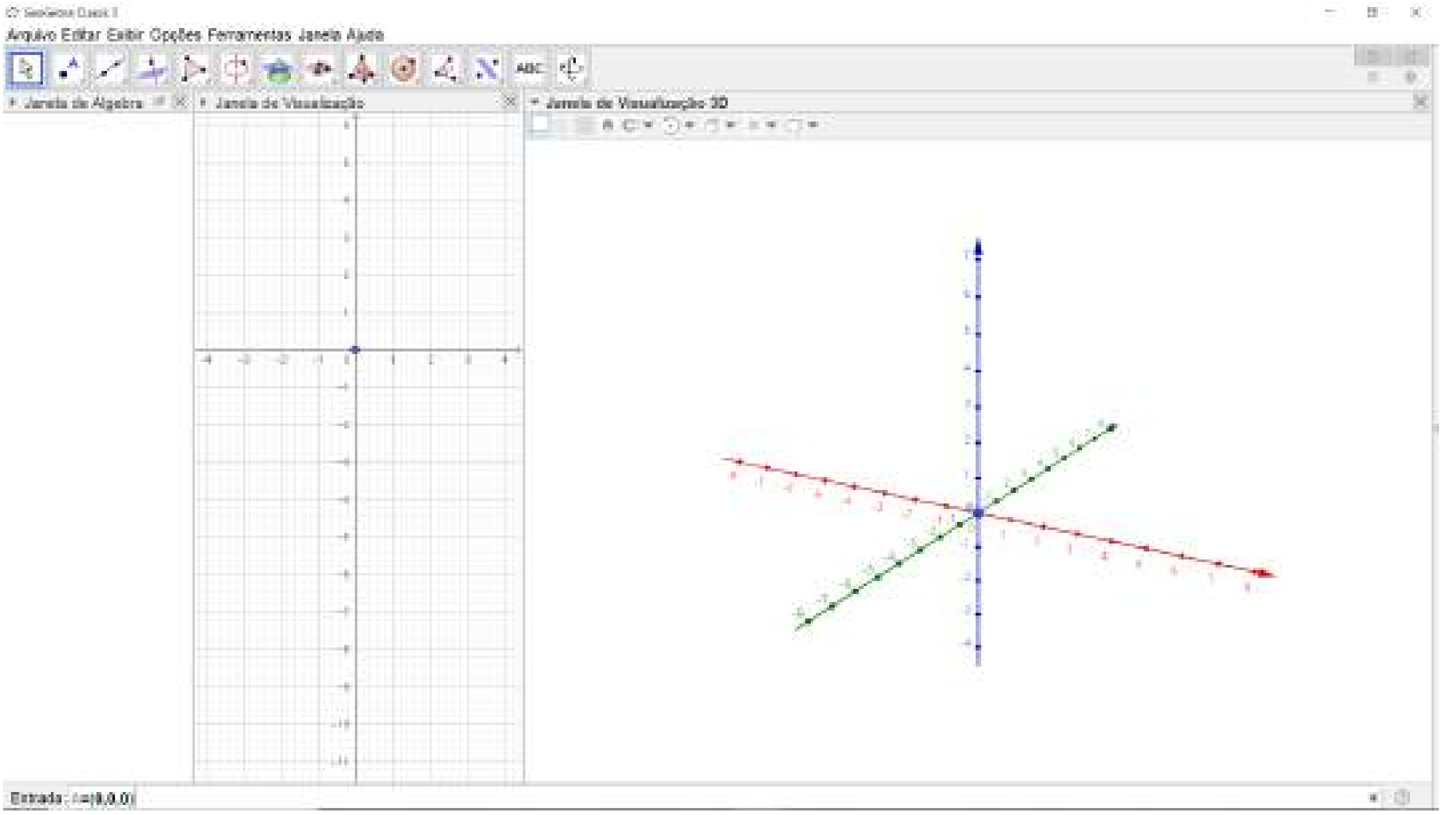
(2) Redimensione as janelas de visualização 2D e 3D, mais ou menos, como na figura abaixo. Além disso, selecione "*Projeção em Perspectiva*" no menu rápido, abaixo da janela 3D, conforme visível na figura.



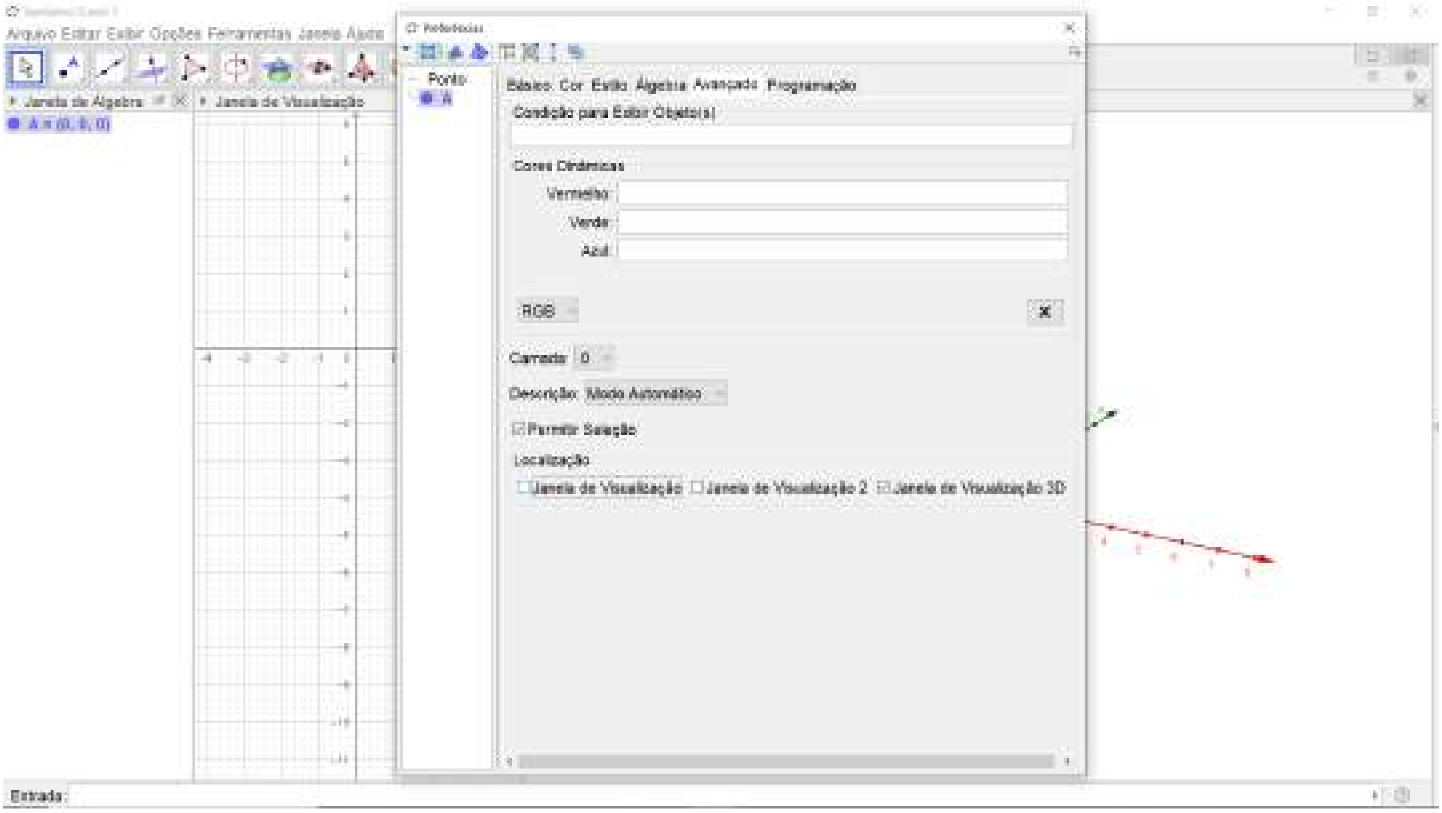
(3) Oculte o “*Plano xy*” no menu rápido da janela 3D, conforme figura abaixo.



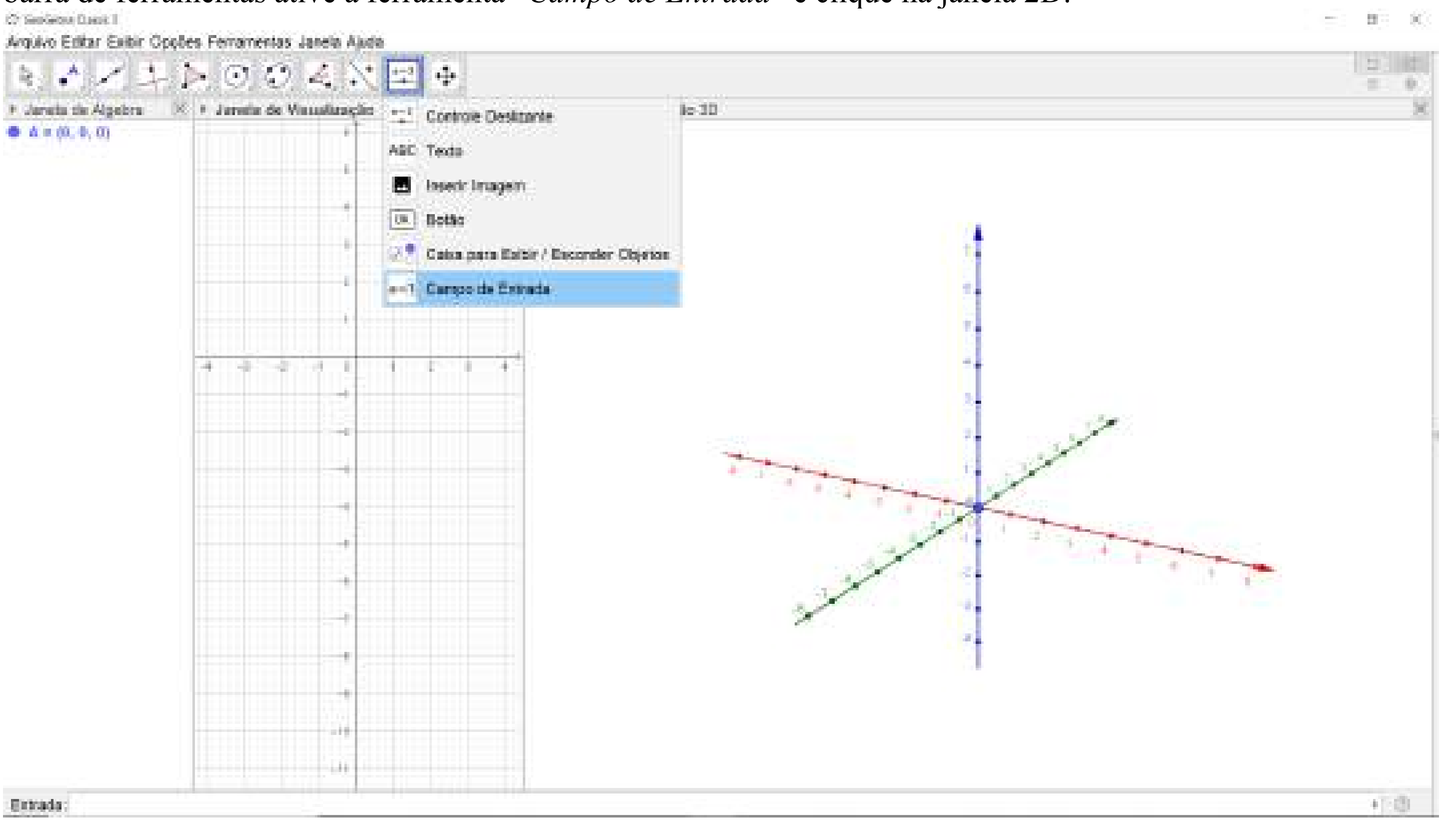
(4) Na linha de entrada de comandos digite **A=(0,0,0)** e tecle « Enter ».



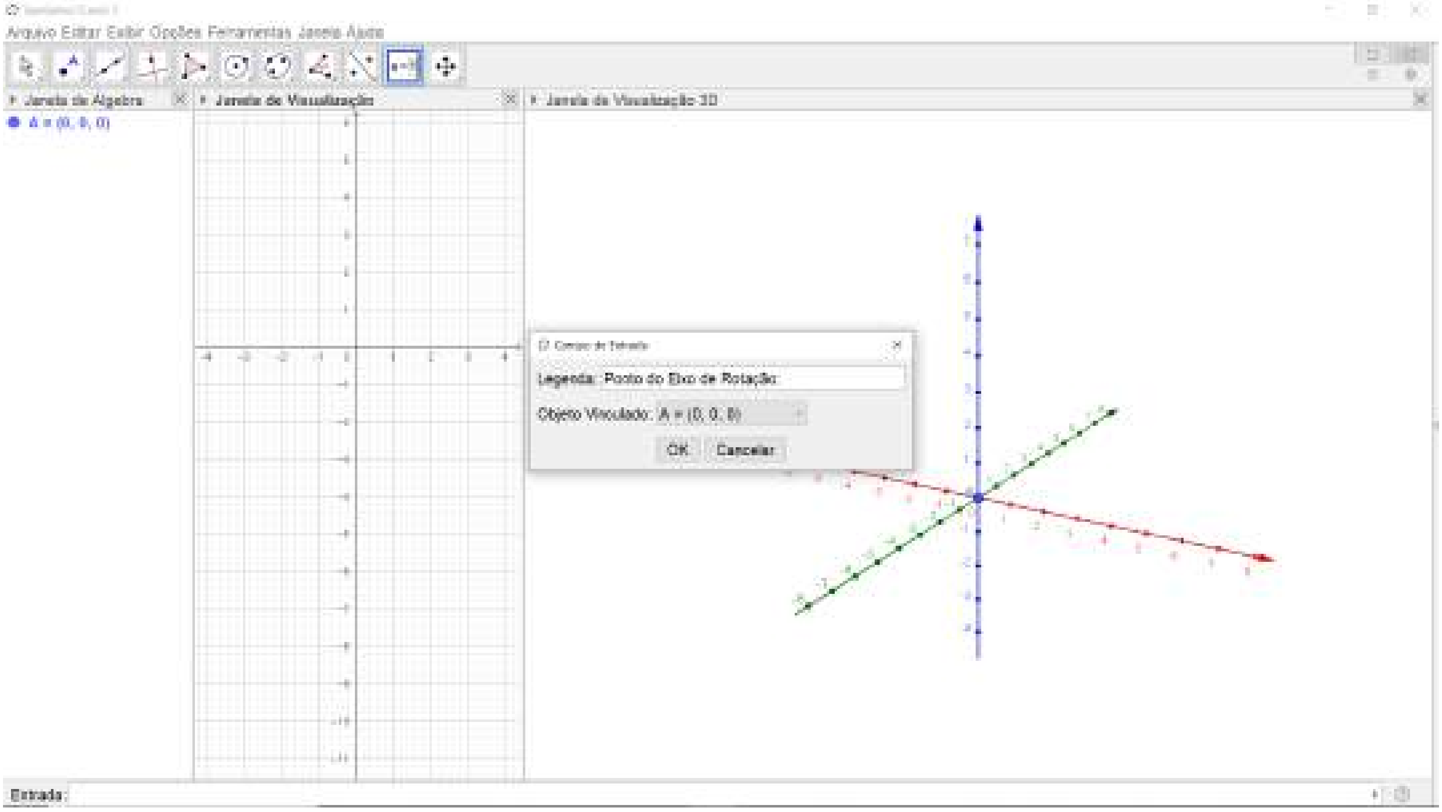
(5) Clique com o botão direito do mouse sobre o ponto **A** na *Janela de Álgebra* e desmarque a opção “*Exibir rótulo*”. Neste mesmo menu, clique em “*Propriedades...*”, acesse a aba “*Avançado*” na janela de propriedades e desmarque a opção “*Janela de Visualização*”, do item “*Localização*”. Com isto, o ponto **A** ficará visível apenas na “*Janela de Visualização 3D*”.



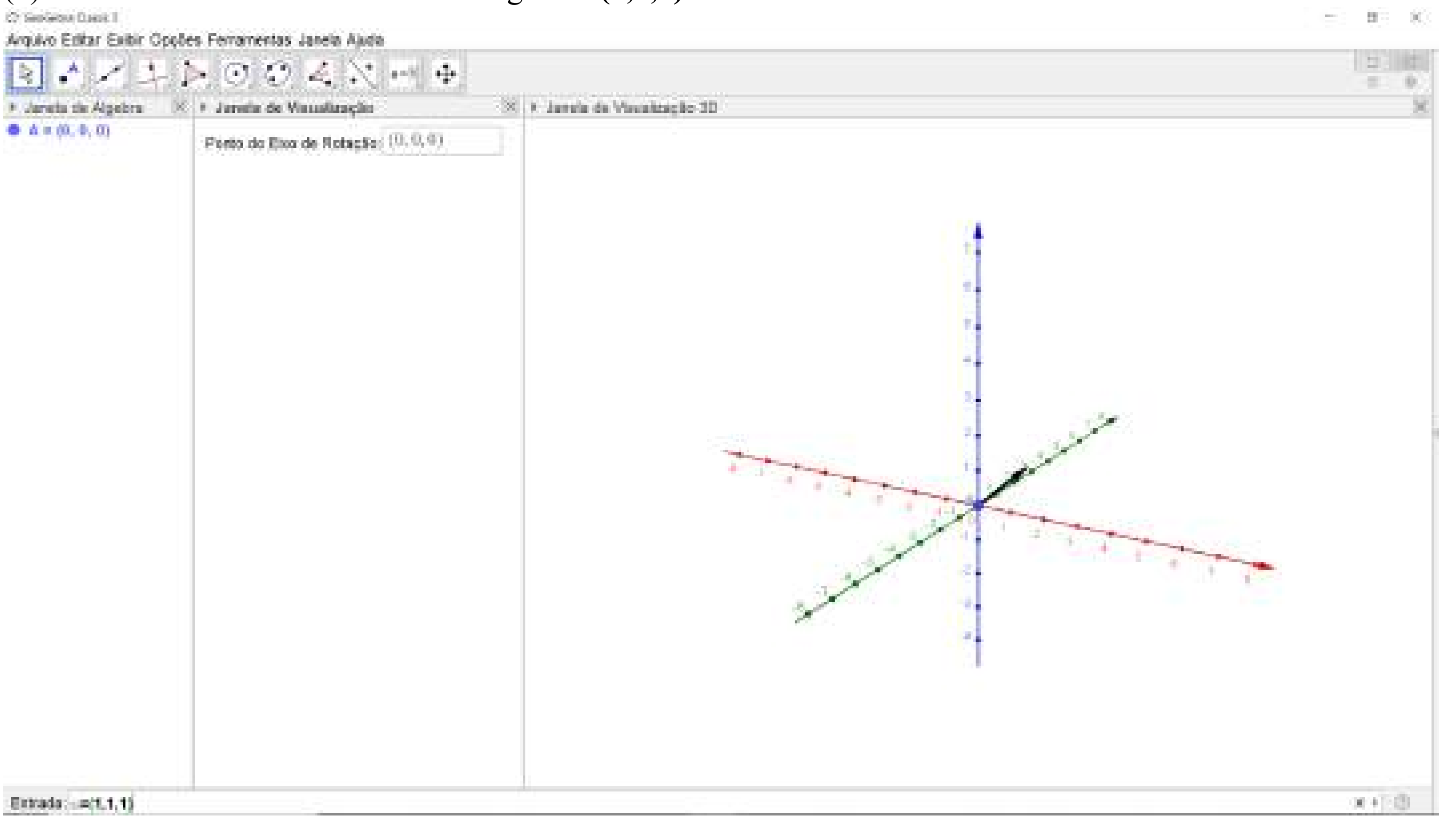
(6) Clique na janela 2D (para que a barra de ferramentas 2D fique visível). No menu do penúltimo botão da barra de ferramentas ative a ferramenta “*Campo de Entrada*” e clique na janela 2D.



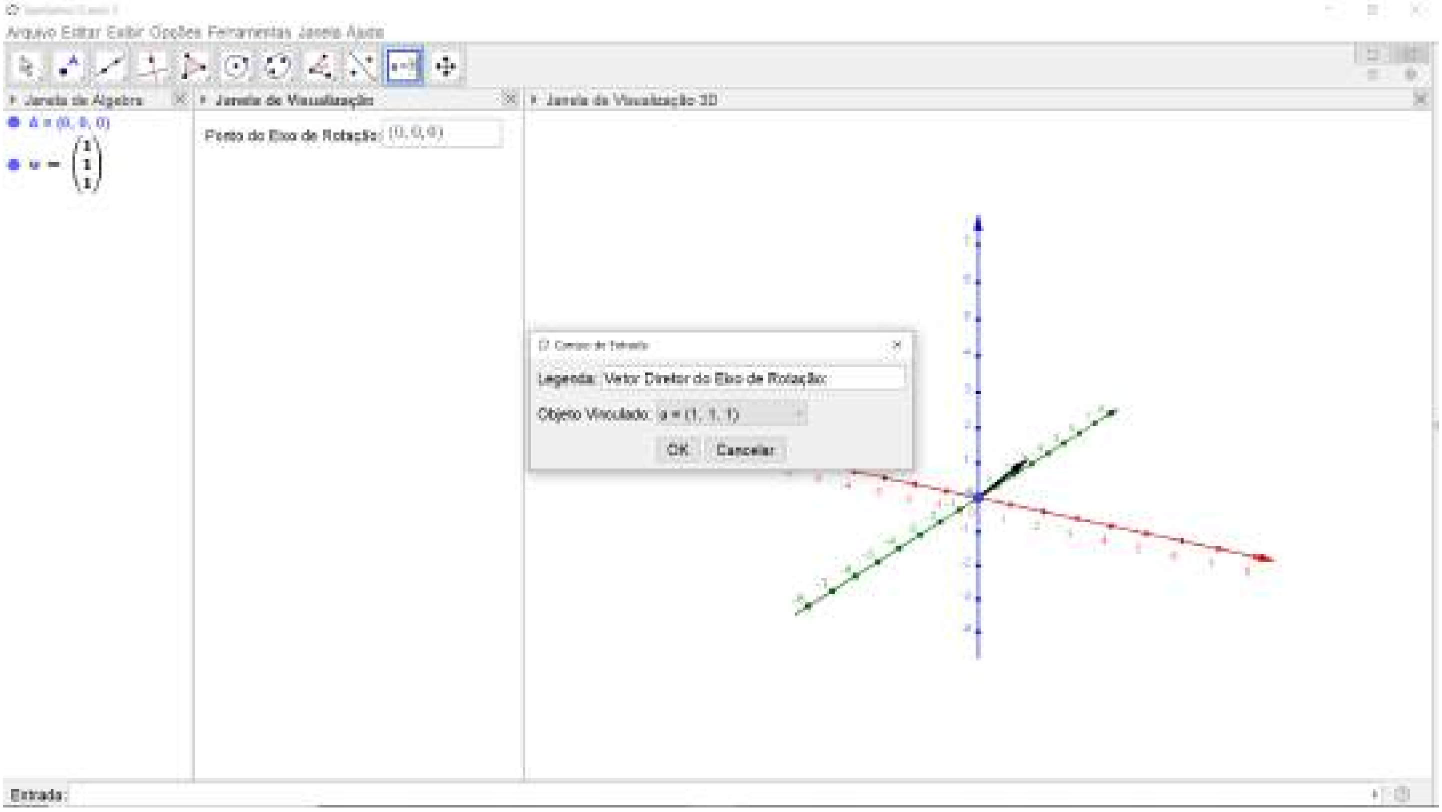
(7) Na caixa de diálogo que se abrirá, digite "*Ponto do Eixo de Rotação:*" no item "*Legenda*". Selecione o ponto **A** no item "*Objeto Vinculado*". Clique em "*OK*" e posicione o campo de entrada na parte superior da janela 2D. Aproveite para ocultar os eixos cartesianos e a grade da janela 2D (faça isso no menu rápido da "*Janela de Visualização*").



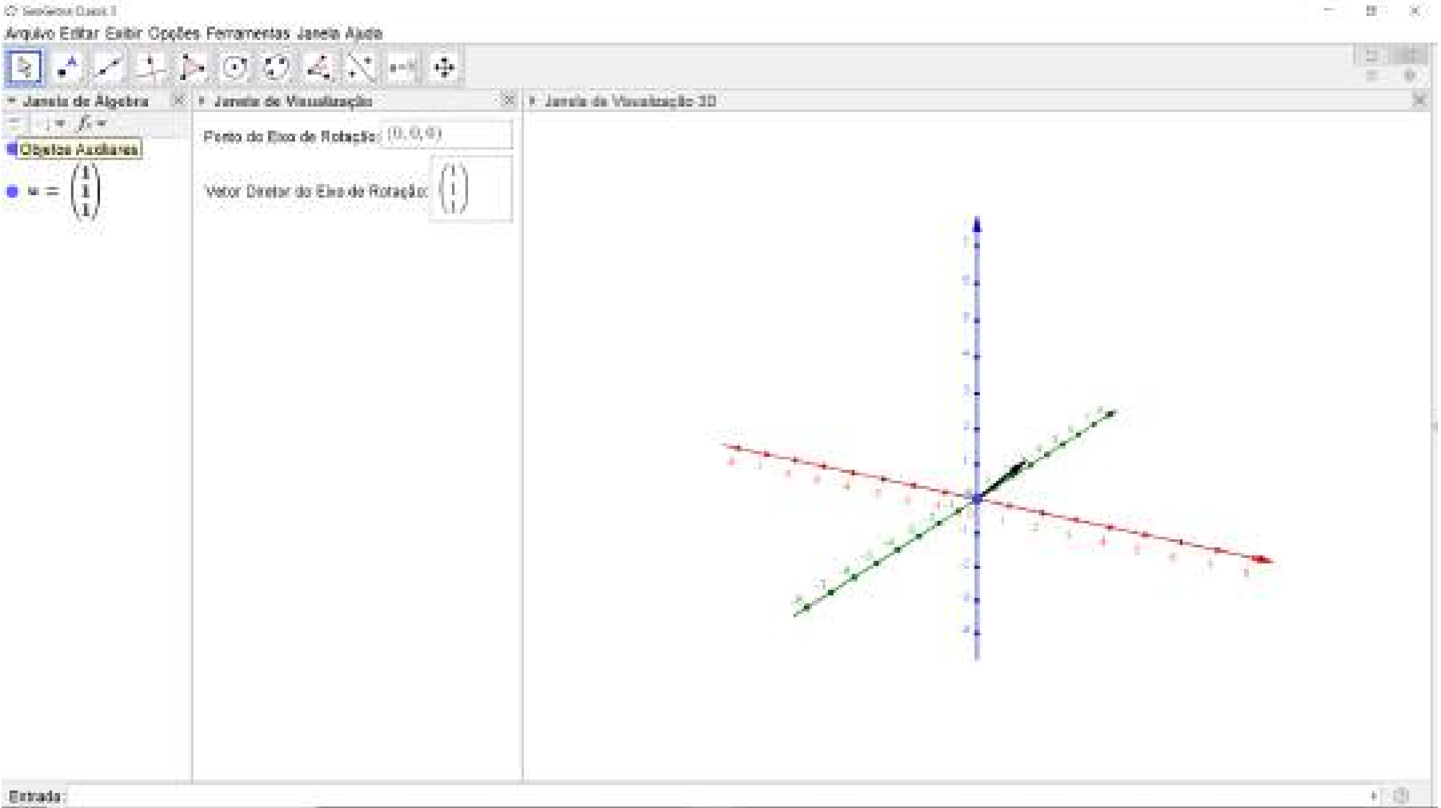
(8) Na linha de entrada de comandos digite **u=(1,1,1)** e tecle « Enter ».



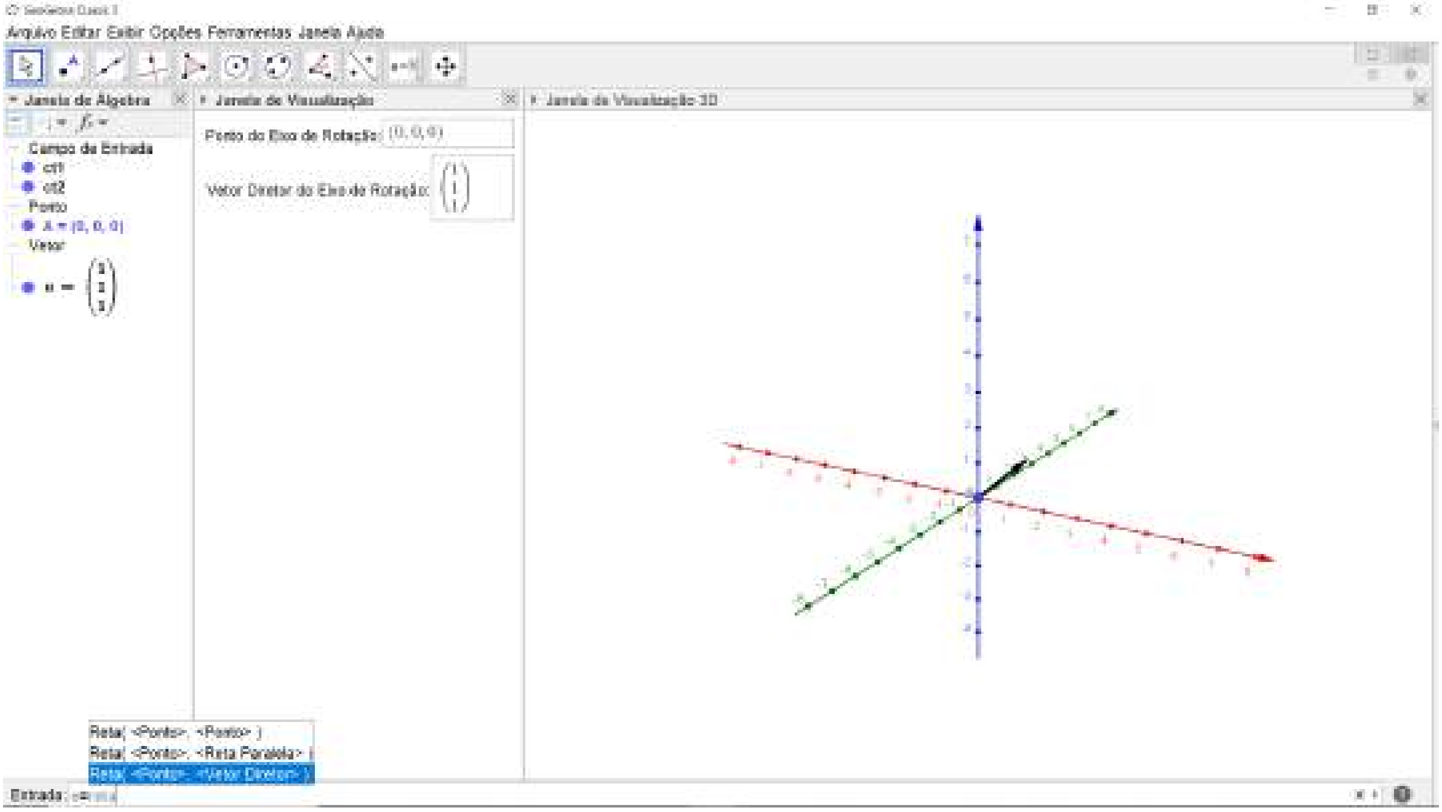
(9) No menu do penúltimo botão da barra de ferramentas ative a ferramenta "*Campo de Entrada*" e clique na janela 2D. Na caixa de diálogo que se abrirá, digite "*Vetor Diretor do Eixo de Rotação:*" no item "*Legenda*". Selecione o vetor **u** no item "*Objeto Vinculado*". Clique em "*OK*".



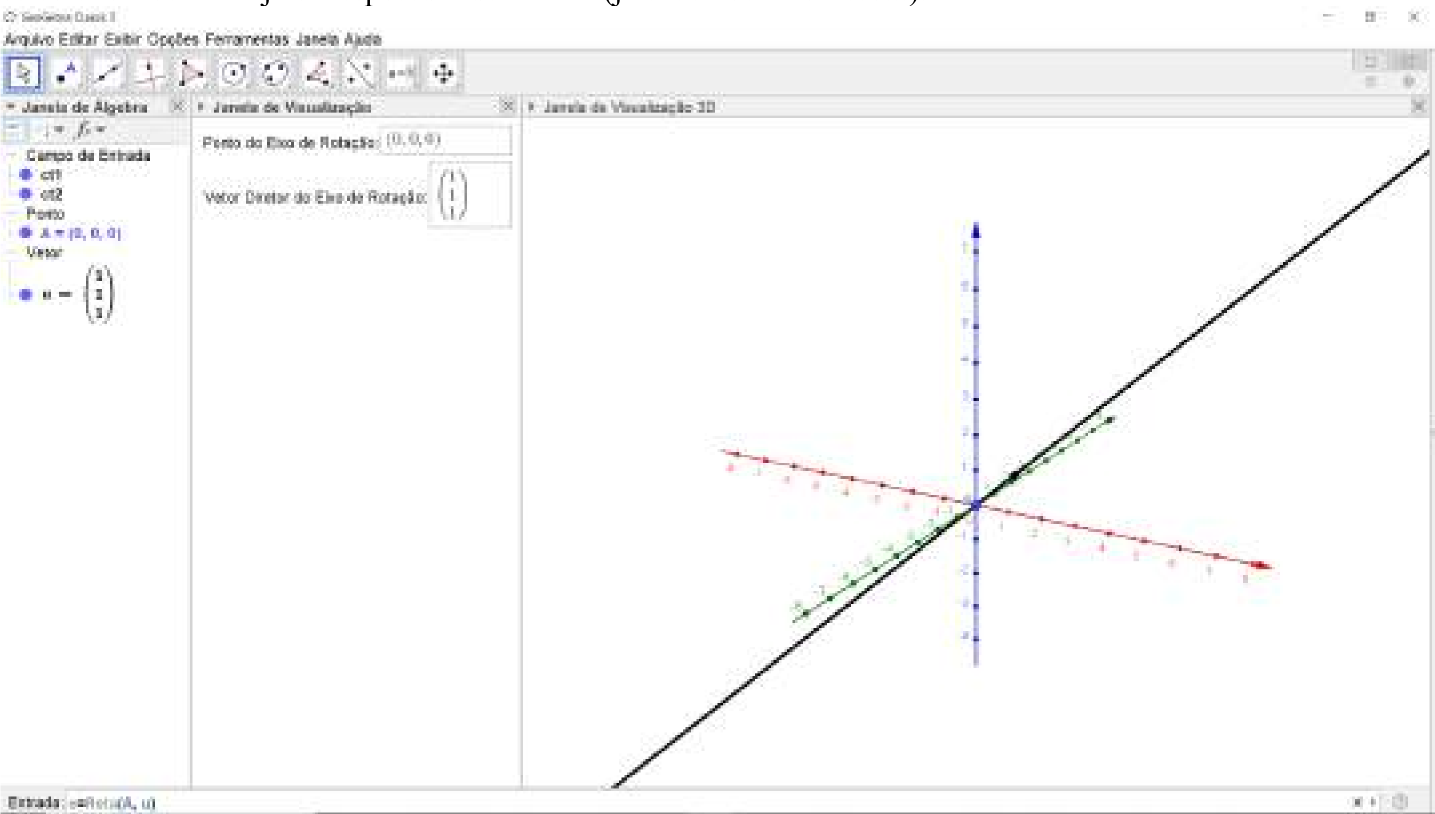
(10) Para fazer os "*Campos de Entrada*" já criados ficarem visíveis na "*Janela de Álgebra*", abra o menu rápido da "*Janela de Álgebra*" e clique no primeiro botão (campos de entrada são classificados como objetos auxiliares no GeoGebra). Aproveite para ordenar os objetos por "*Tipo do Objeto*" na "*Janela de Álgebra*".



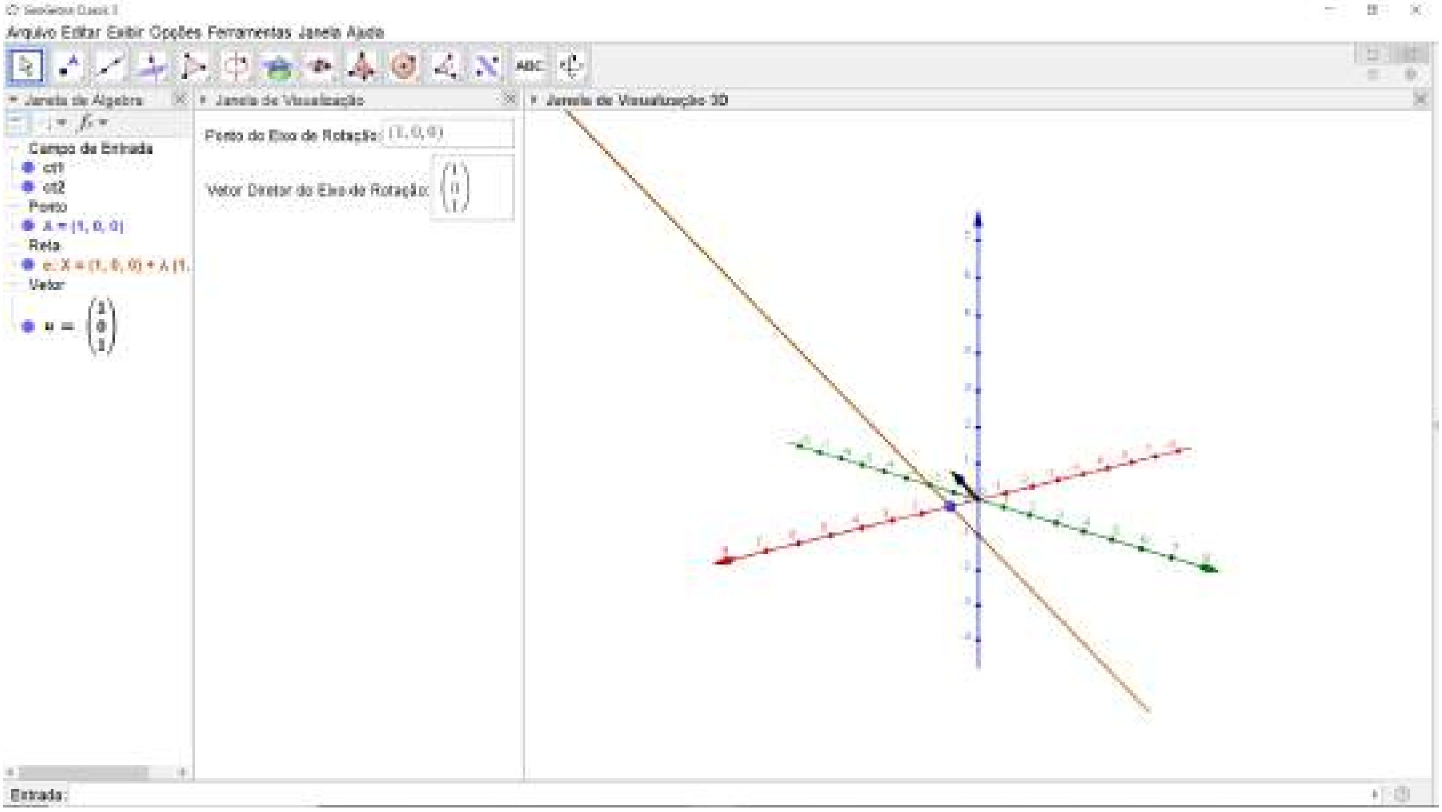
(11) Na linha de entrada de comandos digite **e=reta** e selecione a opção **Reta(<Ponto> , <Vetor Diretor>)**.



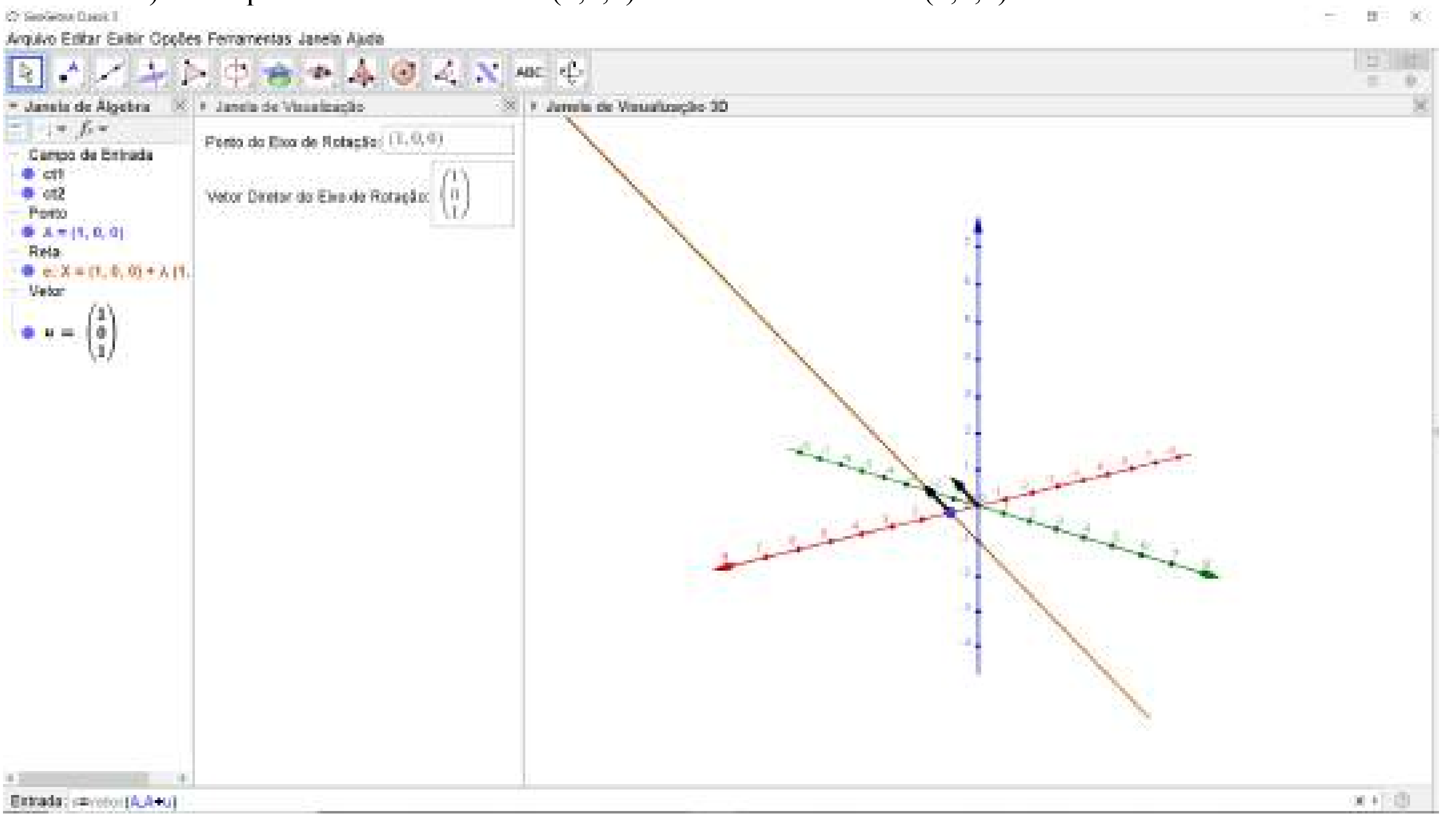
(12) Complete o comando com **e=Reta(A,u)** e tecle « Enter ». Na reta criada, acesse suas propriedades, selecione a cor laranja e a espessura de linha 3 (já sabemos fazer isso...).



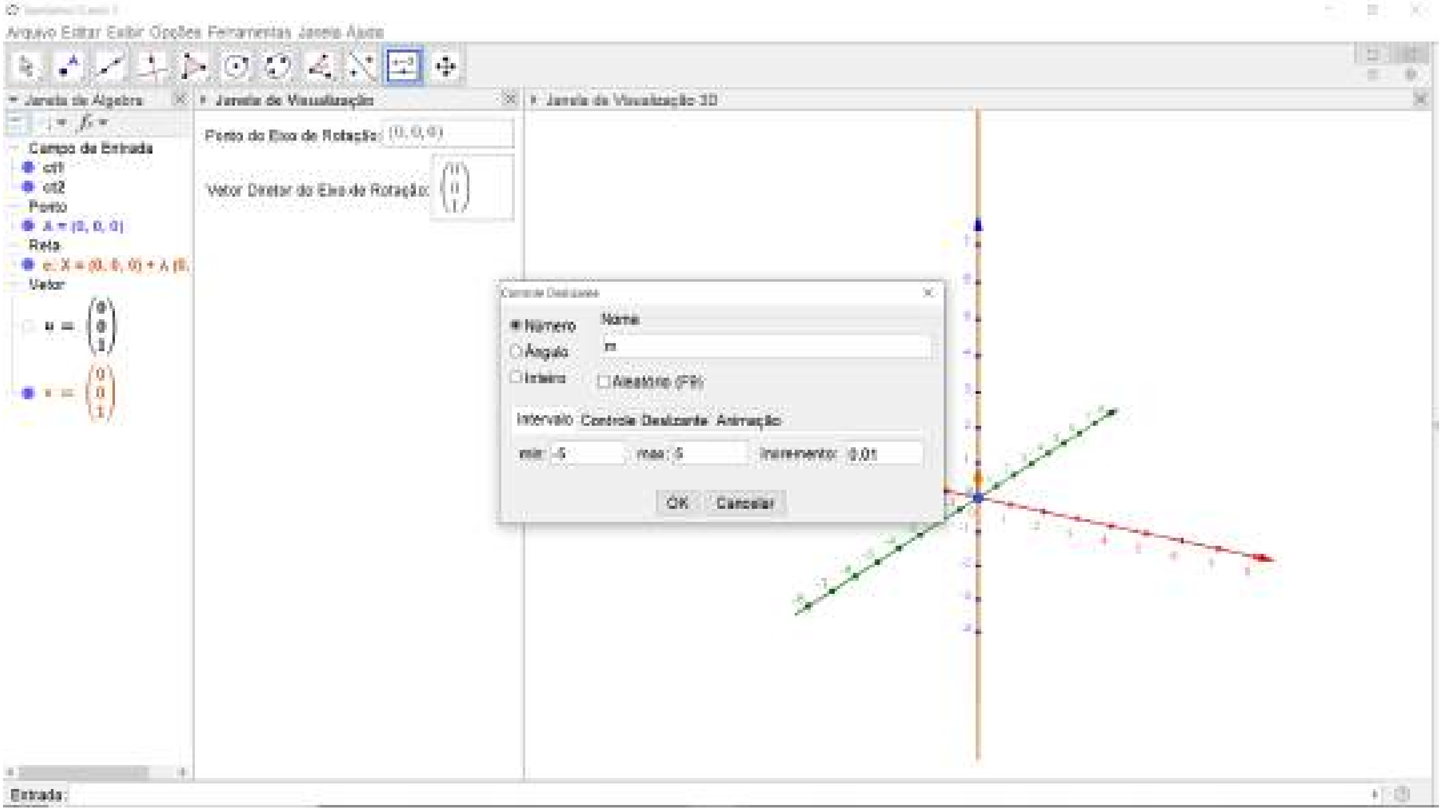
(13) Faça um teste: altere as coordenadas do ponto **A** e do vetor **u** nos campos de entrada criados (movimente a janela 3D e observe). Observe, também, que o vetor **u** sempre fica representado com origem no ponto de coordenadas (0,0,0).



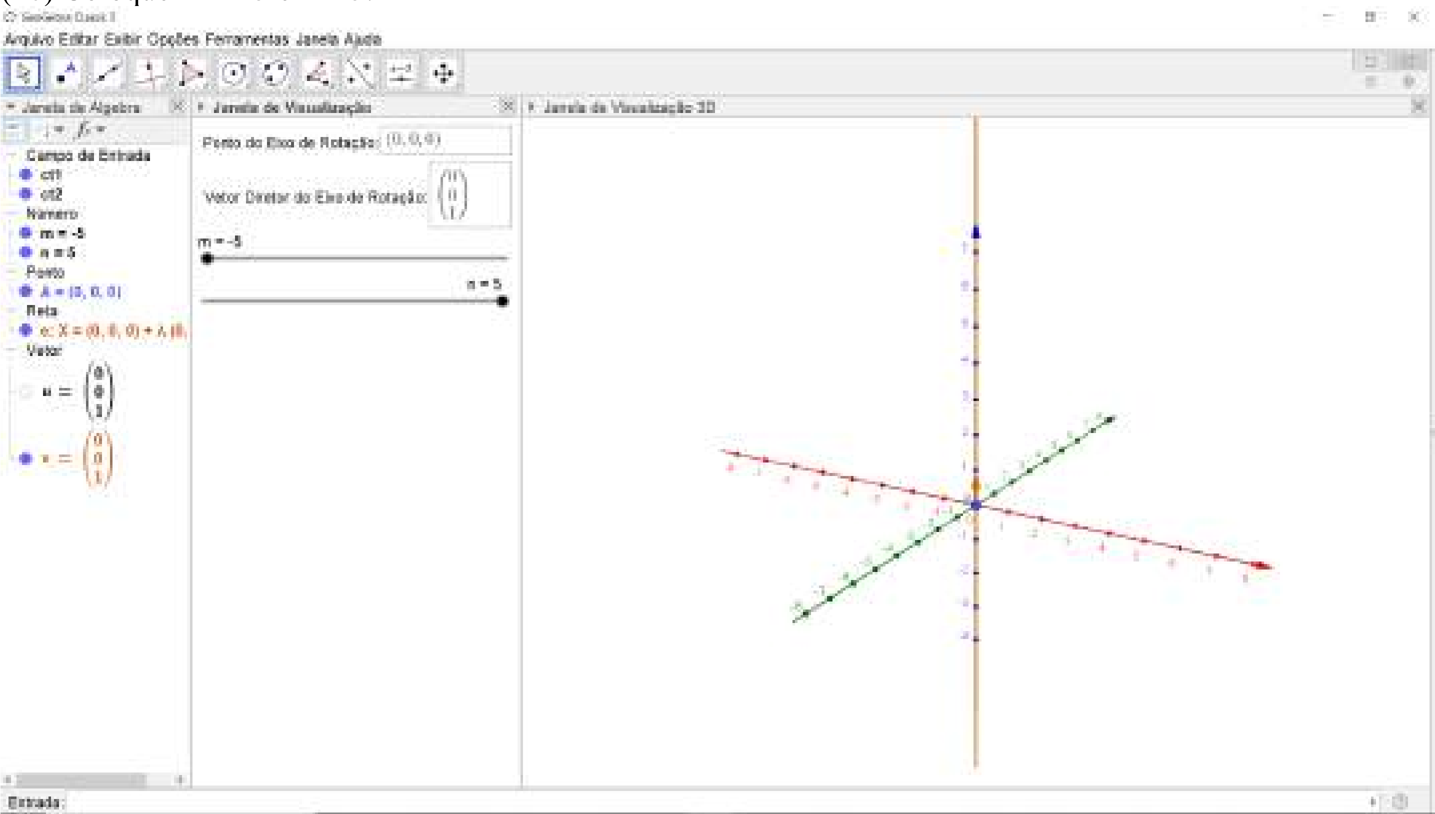
(14) Vamos visualizar o vetor diretor com origem no ponto A: na linha de entrada do comando digite **v=vetor(A,A+u)** e tecle « Enter ». Aproveite para ocultar o vetor **u** e colorir de laranja o vetor **v** (já sabemos fazer isso...). Coloque **A** com coordenadas (0,0,0) e **u** com coordenadas (0,0,1).



(15) Crie dois controles deslizantes: “**m**” e “**n**”, que representarão os extremos do intervalo [m,n], domínio da curva parametrizada que será a geratriz de nossa superfície de revolução. Coloque variação de -5 até 5 para o controle deslizante “m” e variação de m até 5 para o controle deslizante “n” (com isso, teremos sempre m ≤ n). O incremento é de 0,01 para ambos (já sabemos como criar controles deslizantes...).



(16) Coloque m = –5 e n = 5.

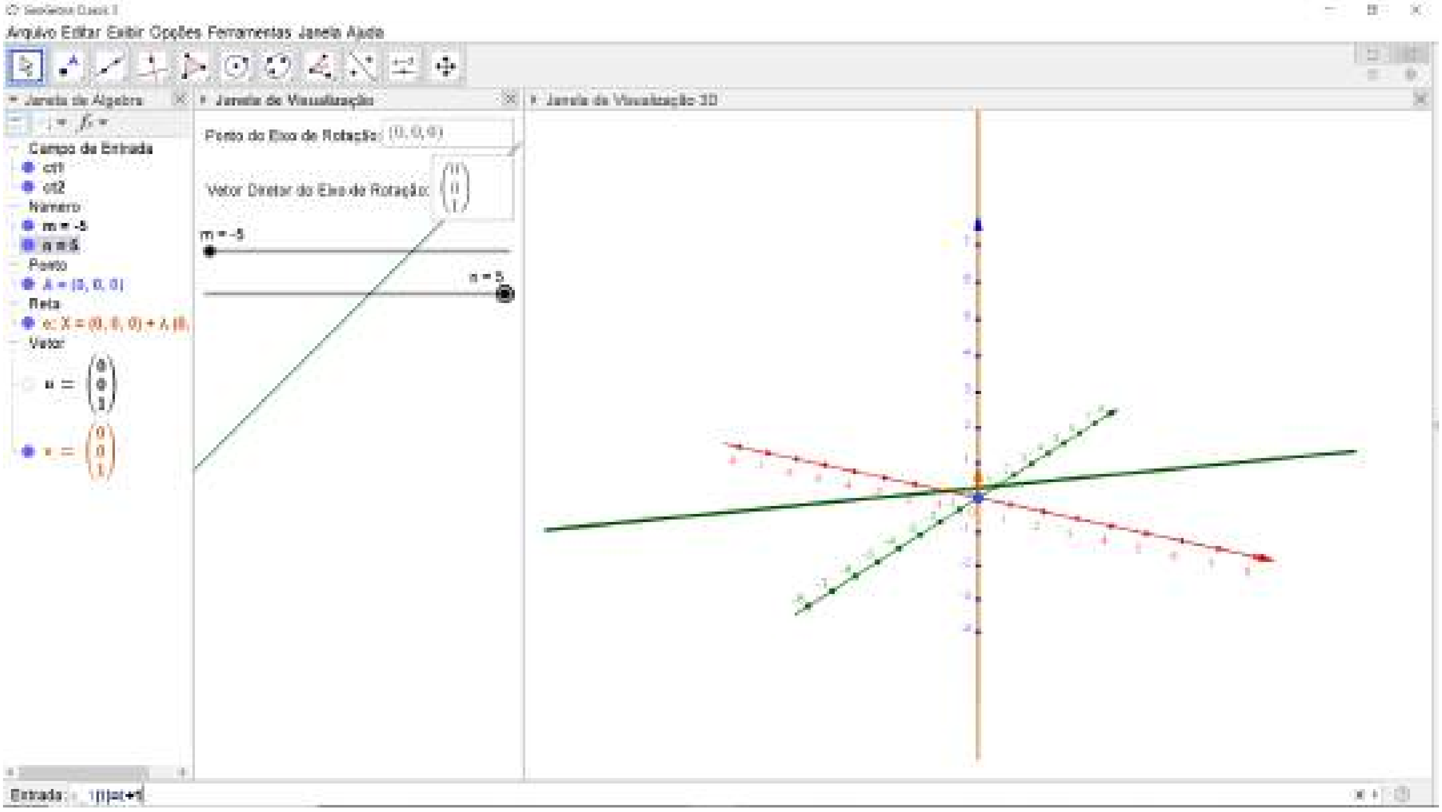


(17) Crie três funções coordenadas: na linha de entrada de comando digite:

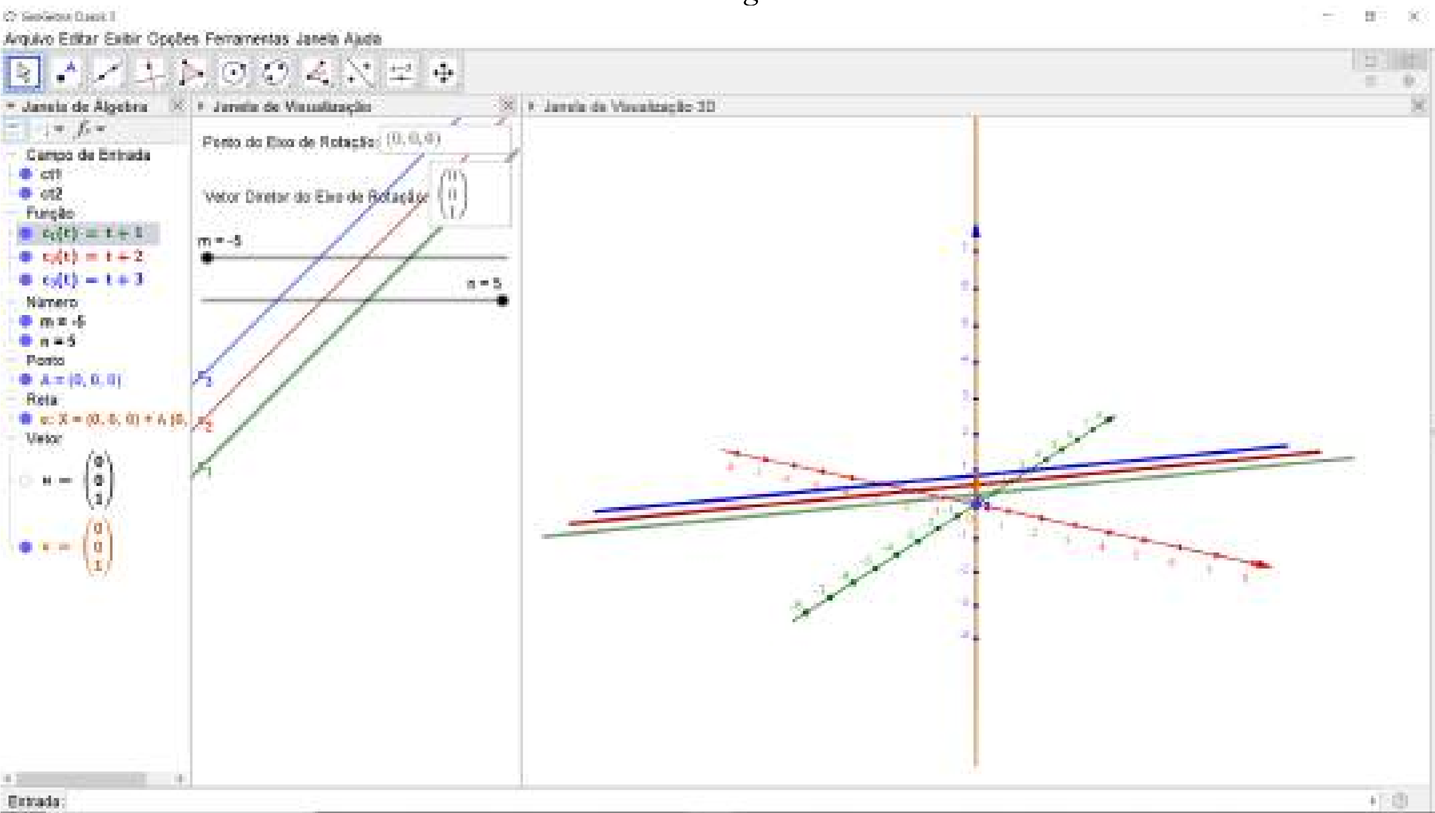
c_1(t)=t+1 e tecle « Enter »;

c_2(t)=t+2 e tecle « Enter »;

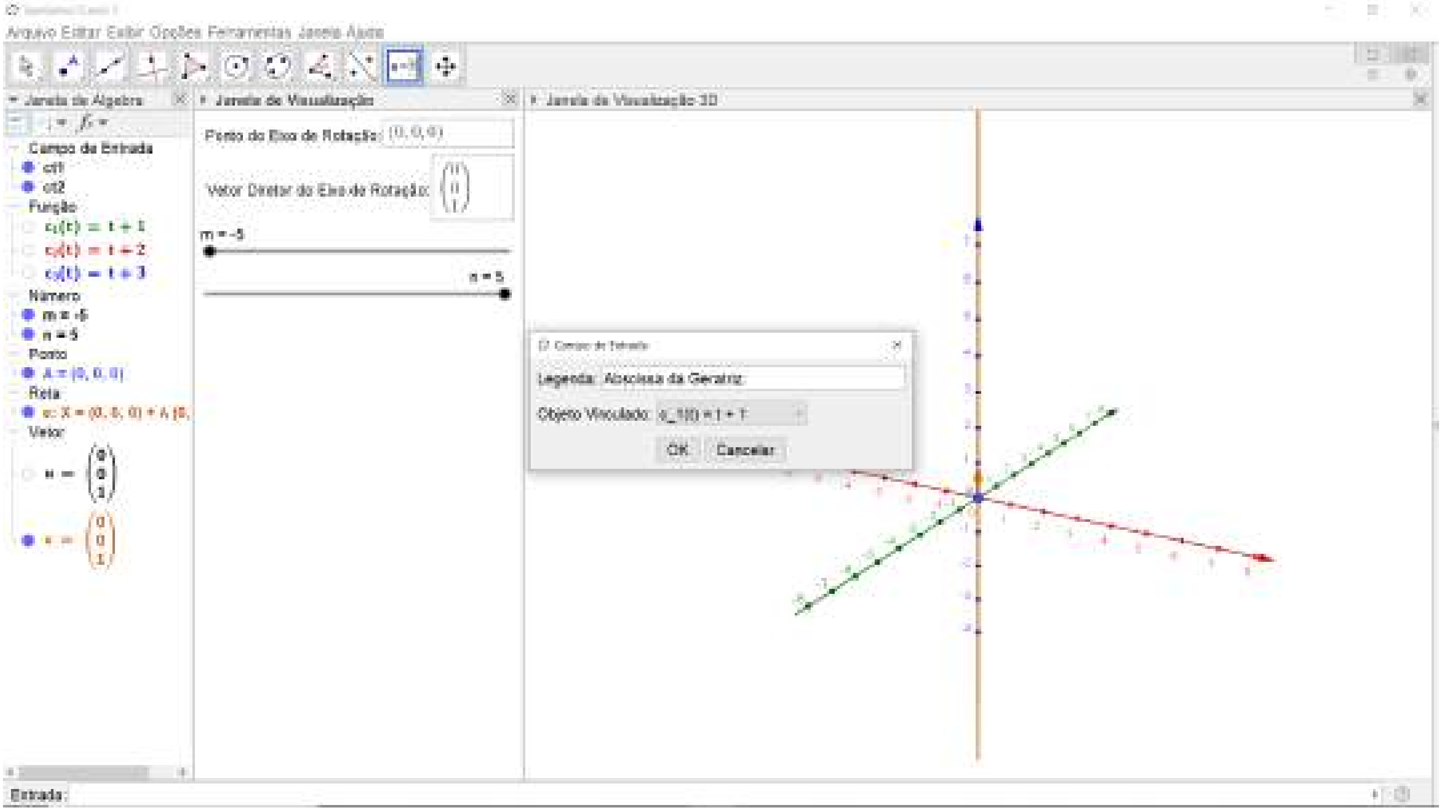
c_3(t)=t+3 e tecle « Enter »;



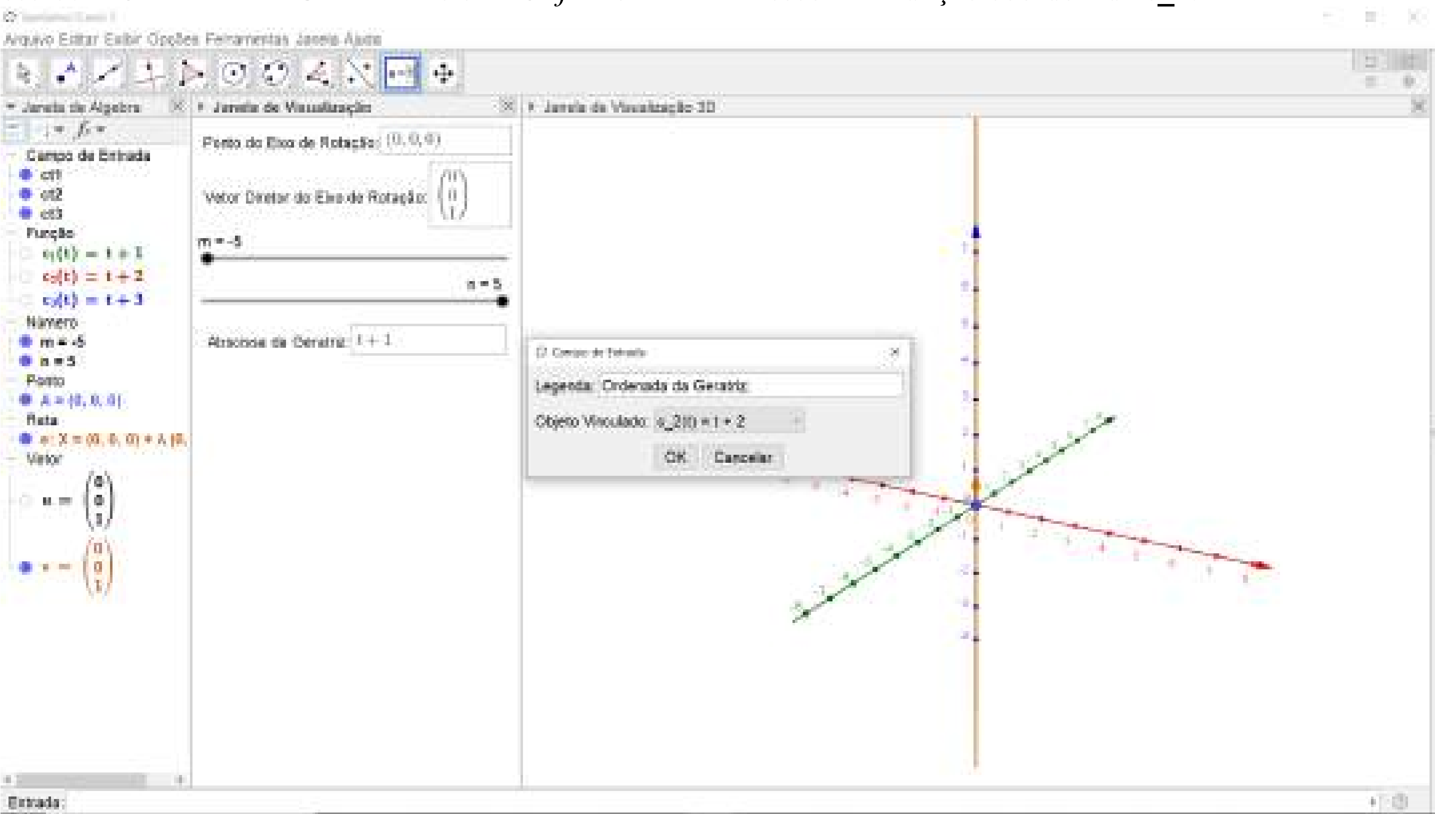
(18) Não precisamos enxergar os gráficos das funções coordenadas digitadas no passo anterior. Oculte-os, por meio dos botões azuis de cada uma delas na "*Janela de Álgebra*".



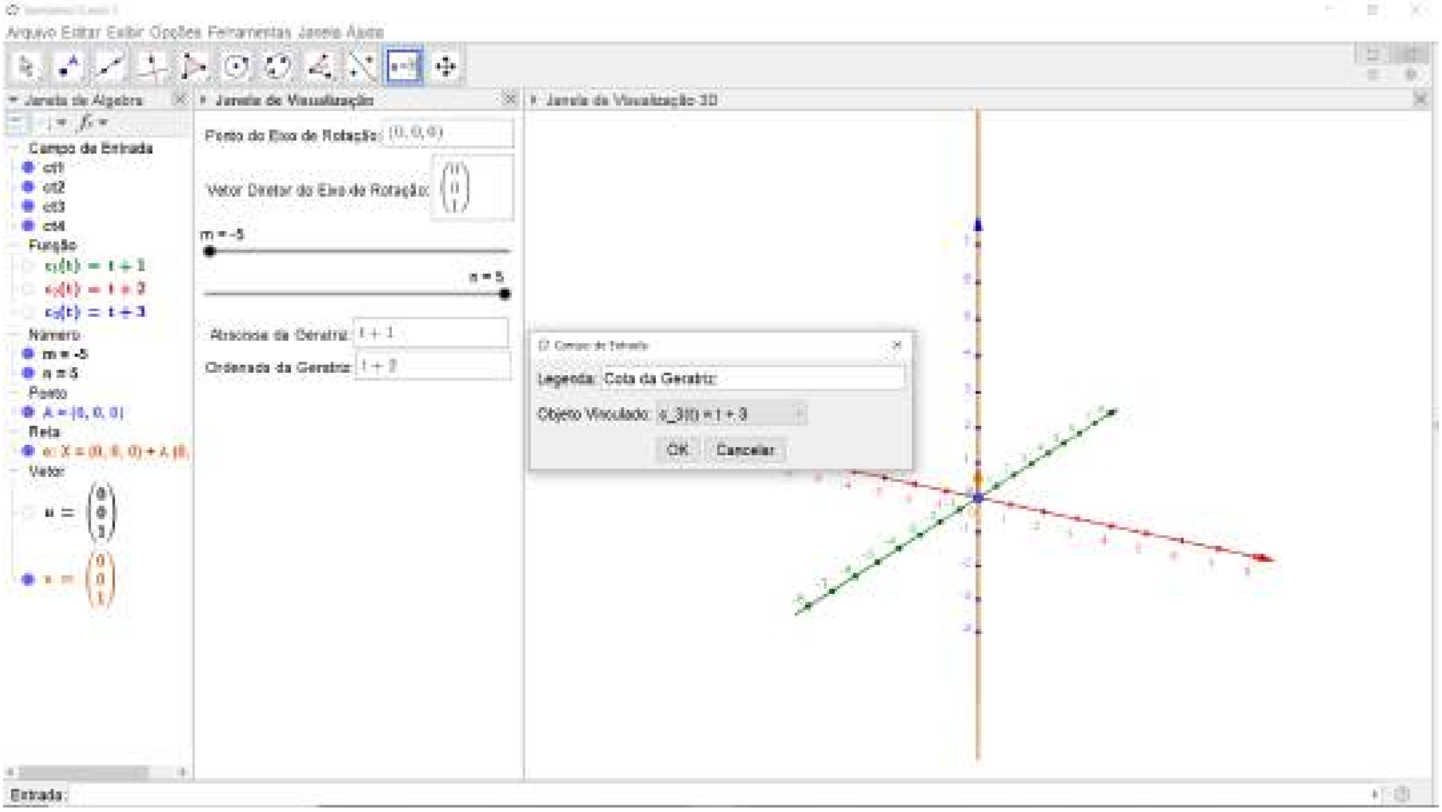
(19) Crie um "*Campo de Entrada*" para a abscissa da curva geratriz da superfície de rotação. Na "*Legenda*" escreva "*Abscissa da Geratriz:*" e em "*Objeto Vinculado*" escolha a função coordenada **c_1**.



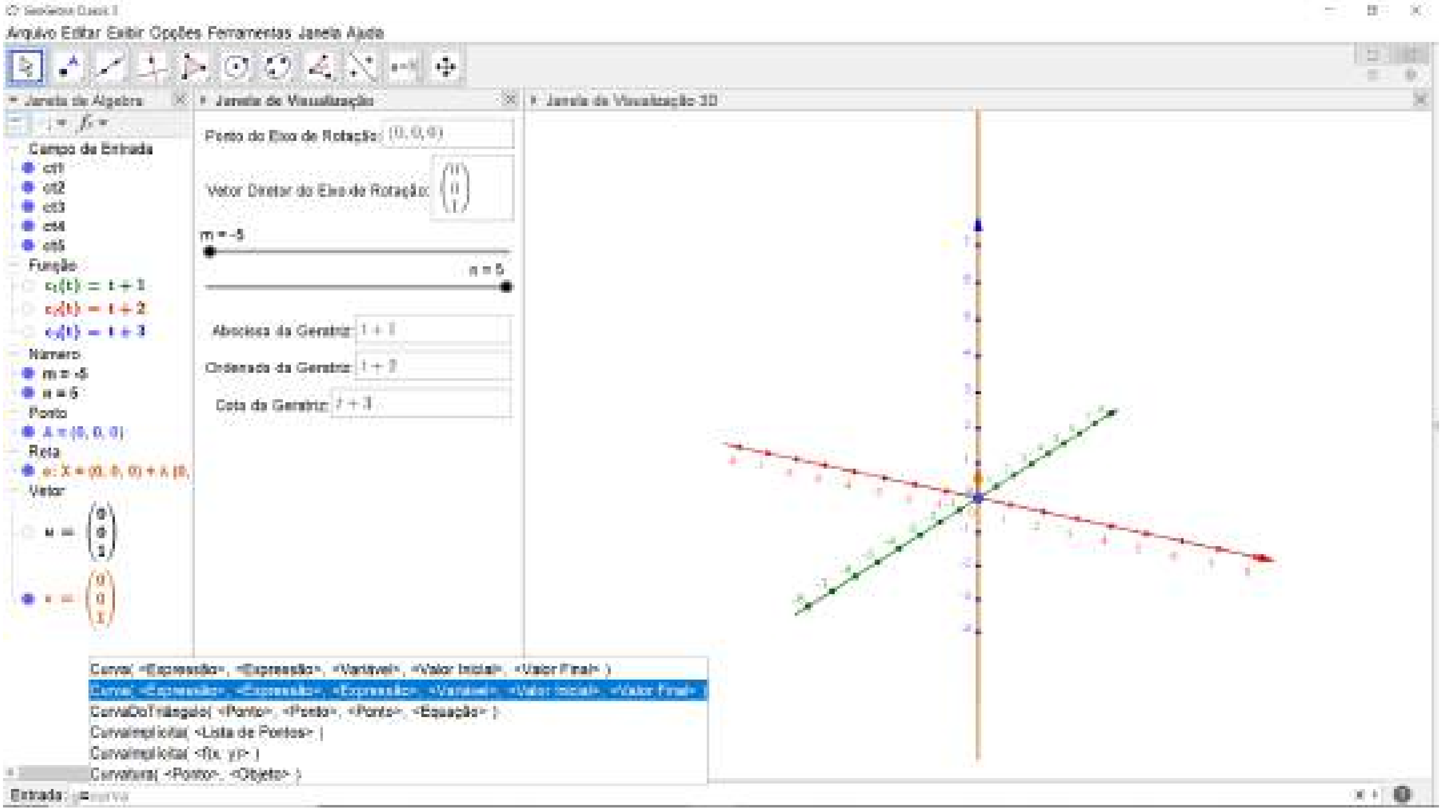
(20) Crie um "*Campo de Entrada*" para a ordenada da curva geratriz da superfície de rotação. Na "*Legenda*" escreva "*Ordenada da Geratriz:*" e em "*Objeto Vinculado*" escolha a função coordenada **c_2**.



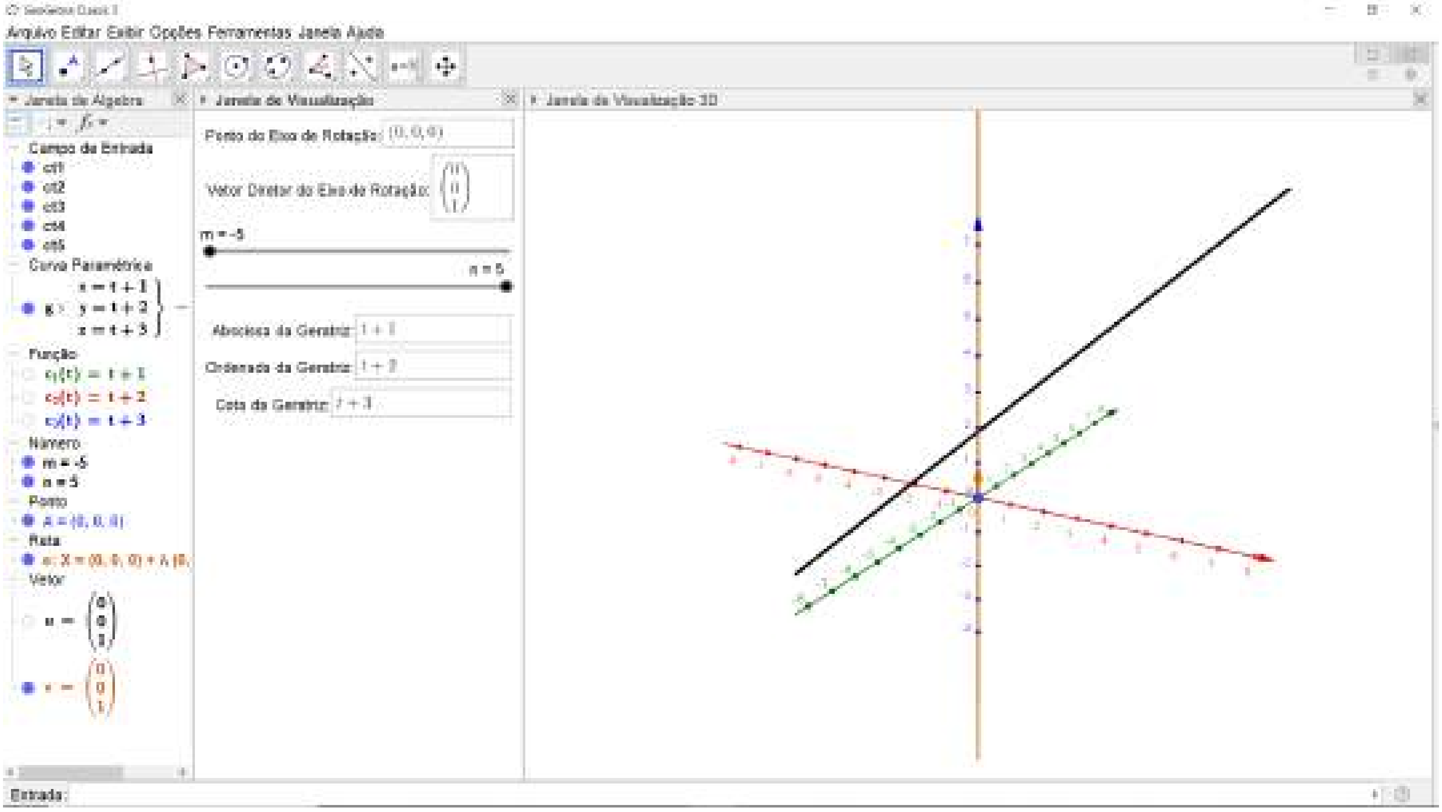
(21) Crie um “*Campo de Entrada*” para a cota da curva geratriz da superfície de rotação. Na “*Legenda*” escreva “*Cota da Geratriz:*” e em “*Objeto Vinculado*” escolha a função coordenada **c_3**.



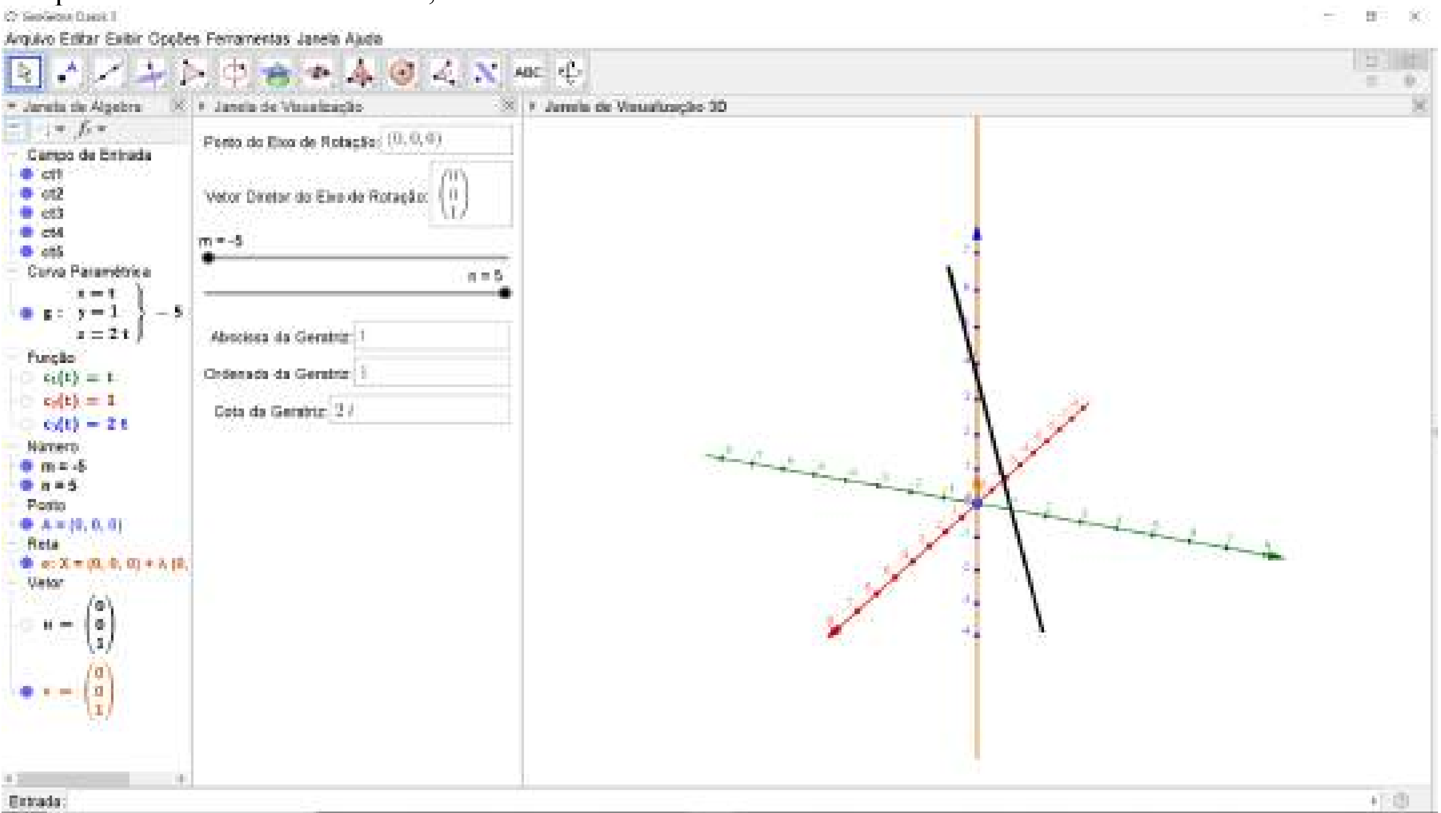
(22) Na linha de entrada de comando digite **g=curva** e selecione a opção
Curva(<Expressão> , <Expressão> , <Expressão> , <Variável> , <Valor Inicial> , <Valor Final>).



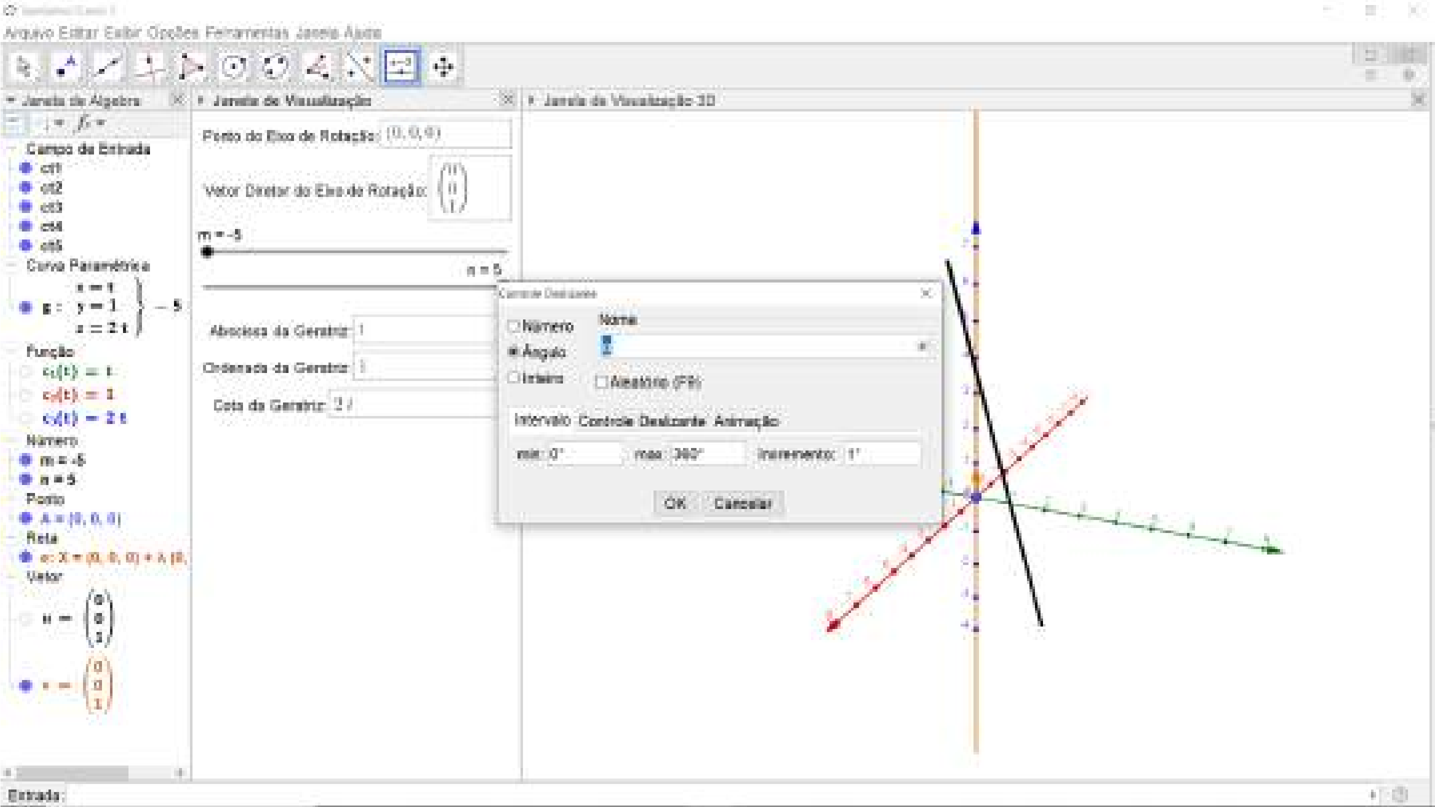
(23) Termine o preenchimento do comando: **g=Curva(c_1(t), c_2(t), c_3(t), t, m, n)** e tecle « Enter ». Temos, assim, a curva parametrizada **g** no espaço cartesiano que será a geratriz da superfície de revolução. Aproveite para deixar a geratriz visível apenas na janela 3D (já vimos como fazer isso...)



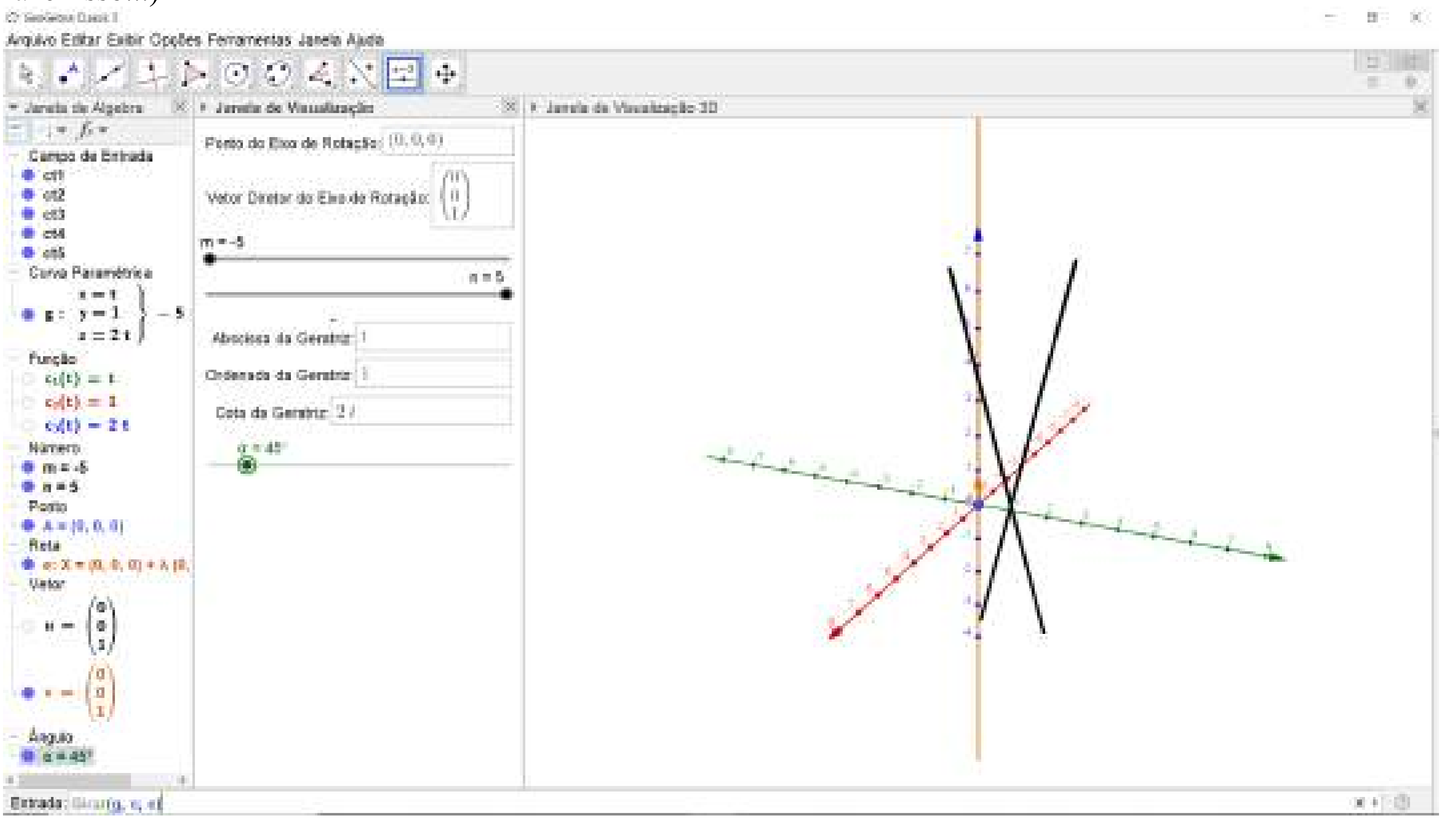
(24) Hora dos testes: altere as funções coordenadas (à vontade) e observe o que acontece na janela 3D. Deixe os campos de entrada em: abscissa **t**, ordenada **1** e cota **2t**.



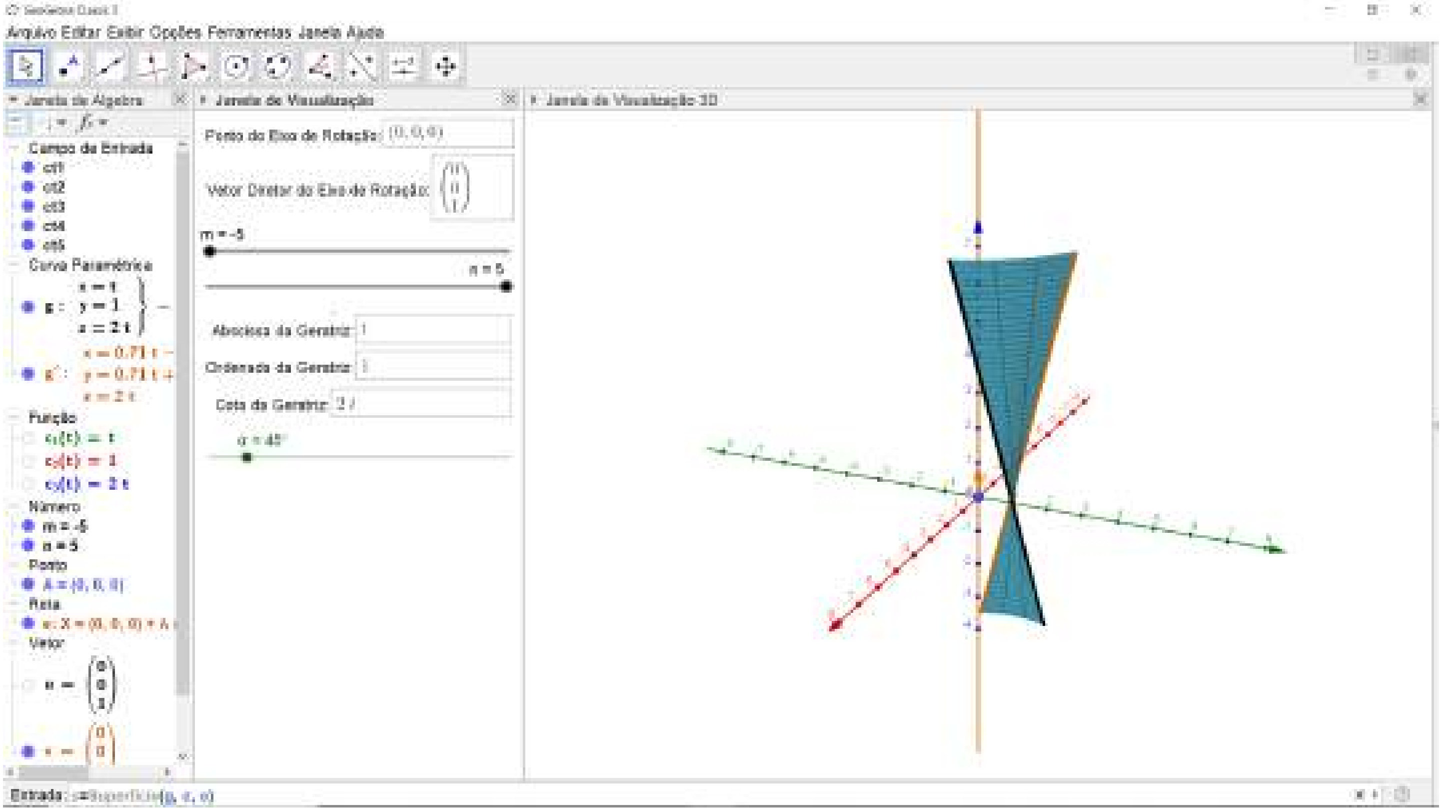
(25) Crie um controle deslizante α como sendo o ângulo de giro da curva g em torno do eixo e. Deixe a variação de 0° a 360° com incremento de 1°.



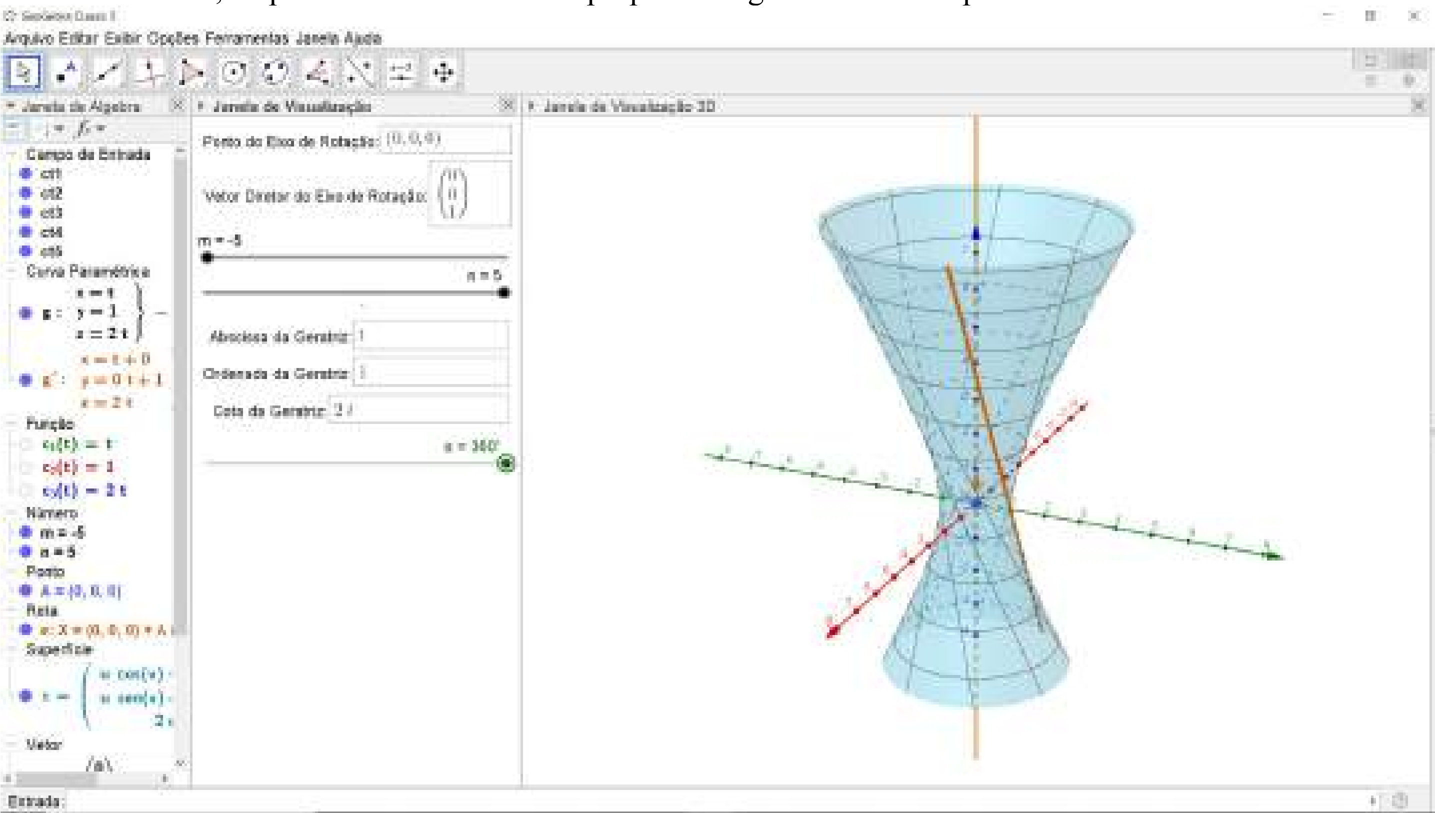
(26) Na linha de entrada de comandos, digite **Girar(g,α,e)** e tecle « Enter ». Coloque esta curva girada, que o GeoGebra chamará de **g'**, na cor laranja. Aproveite para deixar **g'** visível apenas na janela 3D (já vimos como fazer isso...)



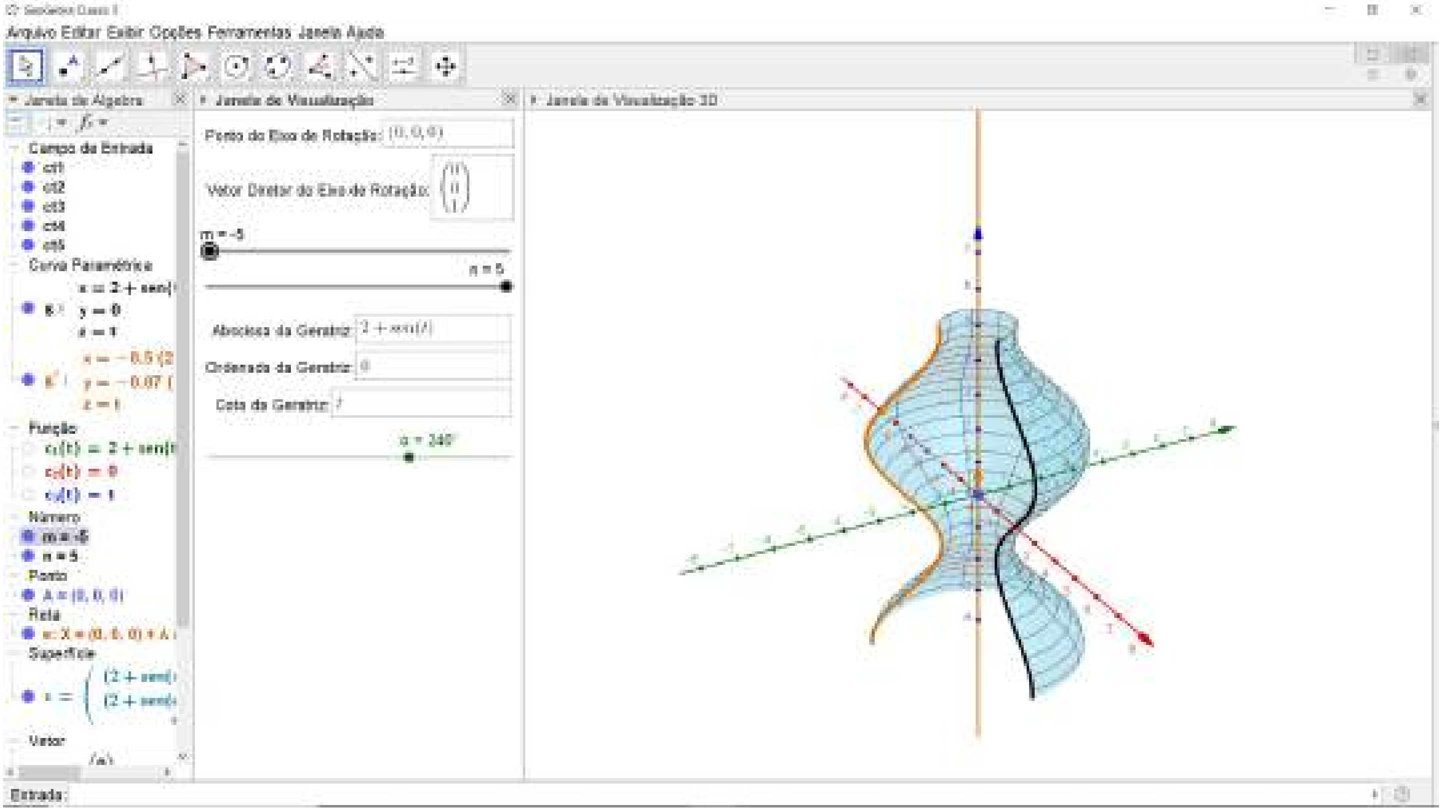
(27) Na linha de entrada de comandos, digite **s=Superfície(g,α,e)** e tecle « Enter ». Isto gerará a superfície de rotação **s** com ângulo de giro **α** em torno do eixo **e**. Aproveite para colocar essa superfície com transparência de 25% (já sabemos fazer isso...)



(28) Hora de mais testes: varie α e verifique que a superfície de revolução (neste caso em que a geratriz é **g(t)=(t,1,2t)**) é um belo hiperboloide de uma folha que, aliás, é uma superfície regrada, ou seja, composta por retas. Neste caso, dá para ver claramente esta propriedade geométrica do hiperboloide de uma folha.



(29) Agora é hora de testar tudo o que já construímos. Varie o ponto **A**, o vetor **u**, as funções abscissa, ordenada e cota da geratriz **g** da superfície **s**, além dos controles deslizantes **m**, **n** e **α**. Observe que algumas superfícies de revolução são bem estranhas... Abaixo temos uma superfície de revolução com geratriz senoidal, com geratriz **g(t)=(2+sen(t),0,t)**.



FIM DA PARTE 1

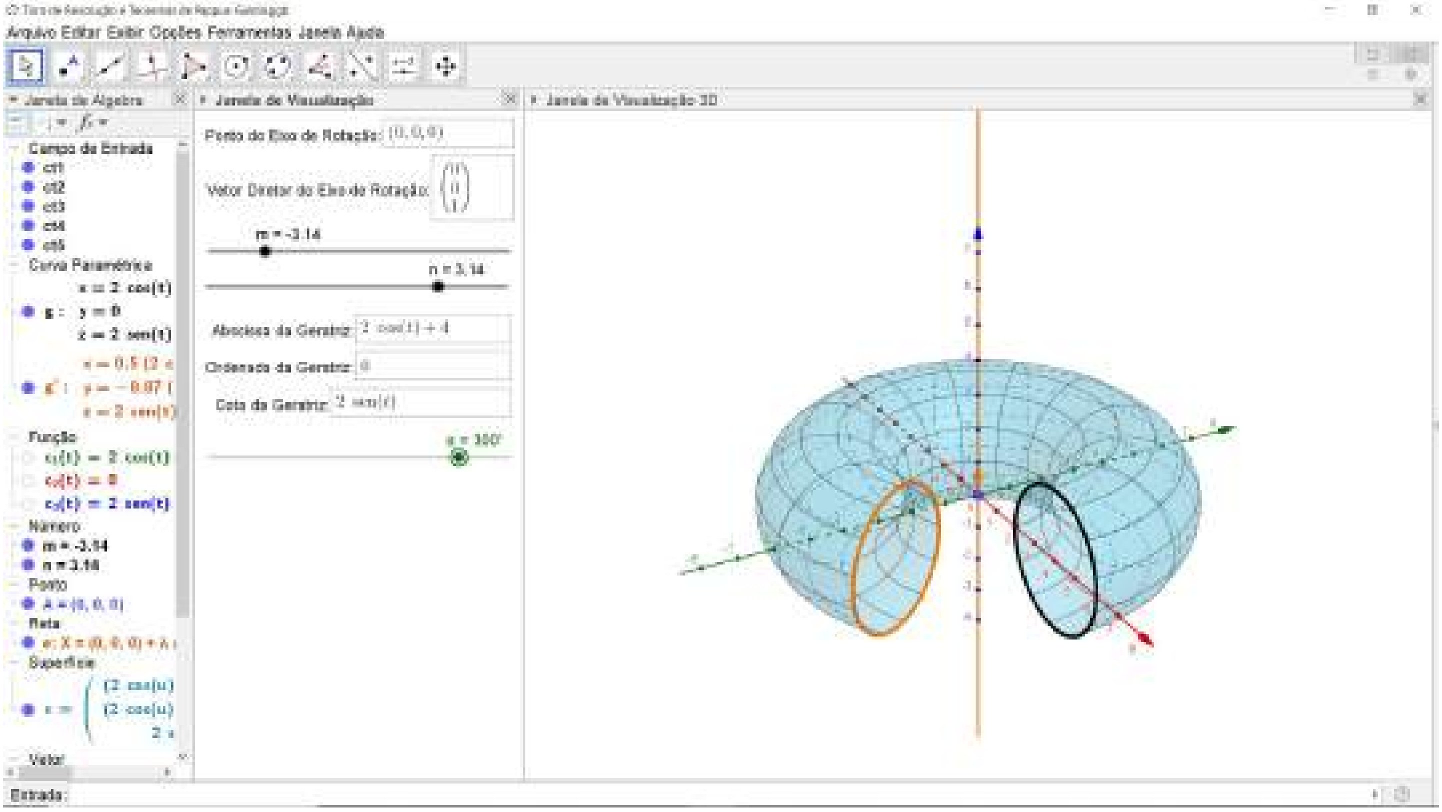
Salve a construção da superfície de revolução com geratriz **g** “genérica”.
Sugestão de nome para o arquivo: “*Superfície de Revolução Genérica.ggb*”.

Salve uma **cópia** deste arquivo ggb com outro nome (sim, vamos ficar com dois arquivos!).
Sugestão de nome para o segundo arquivo: “*Toro de Revolução e Teoremas de Pappus-Guldin.ggb*”.

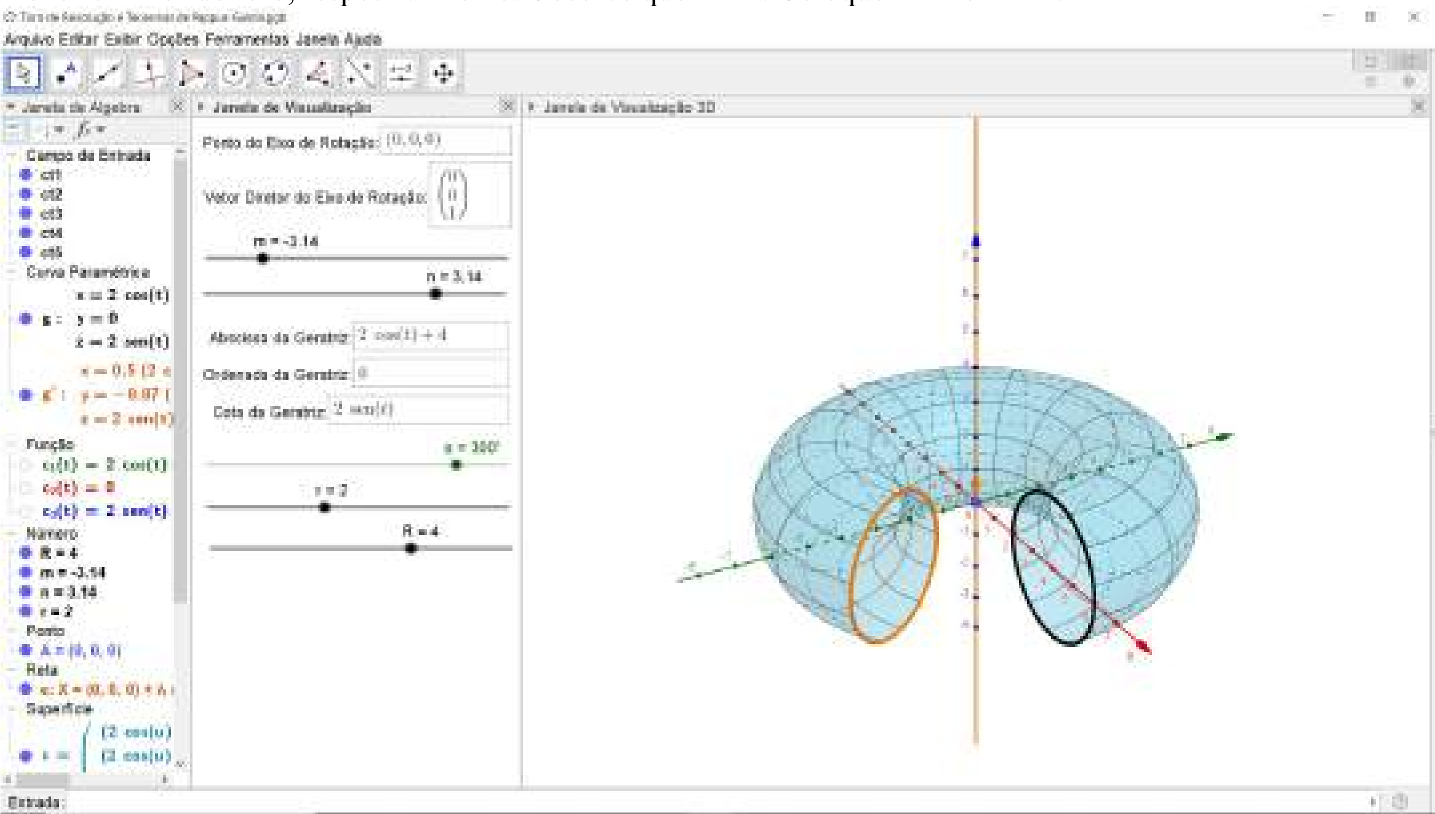
Neste segundo arquivo vamos continuar nossa construção, agora voltada para uma aplicação dos dois **Teoremas de Pappus-Guldin**.

PARTE 2

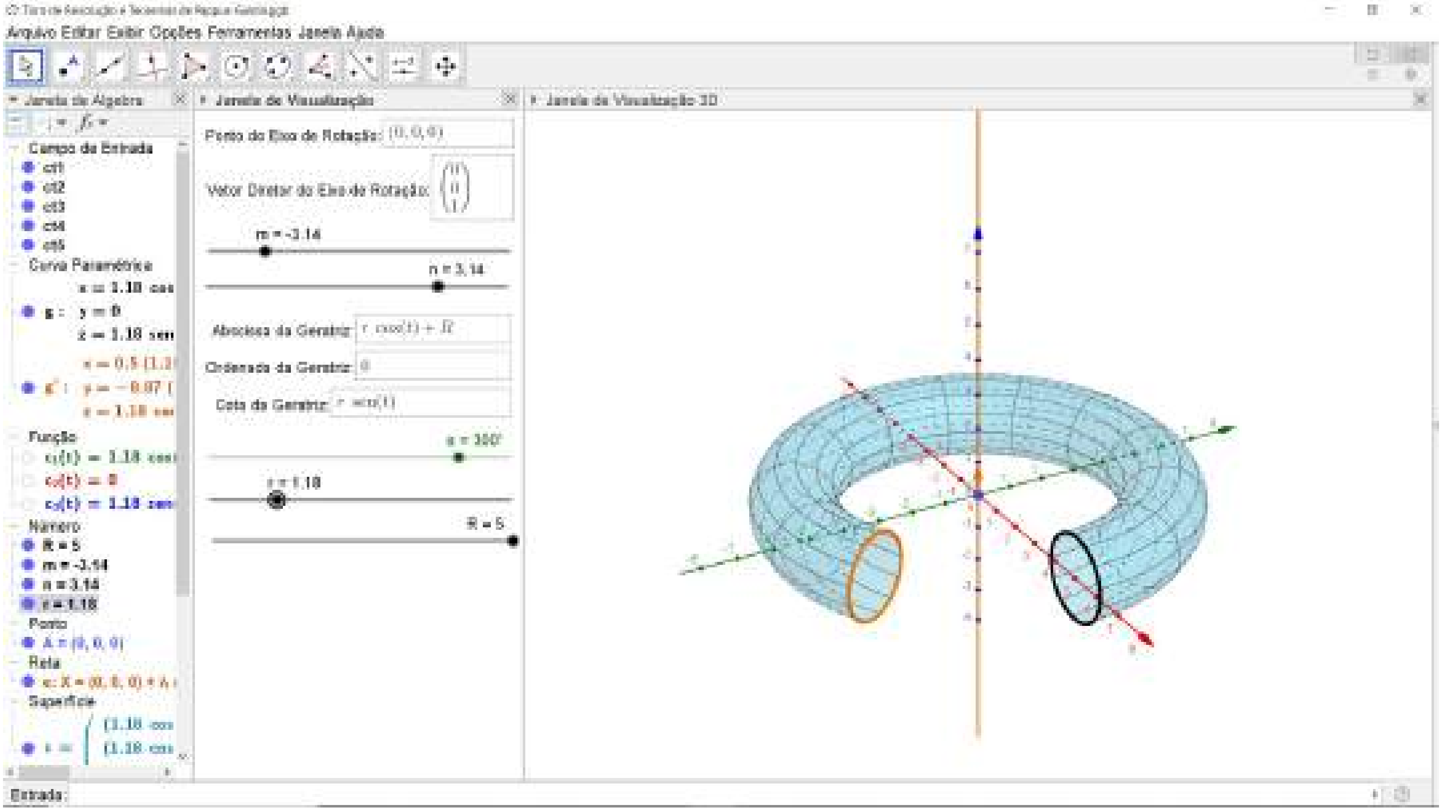
(30) Coloque a geratriz **g** da superfície de revolução **s** como sendo um círculo de raio 2 e centro no ponto C(4,0,0), ou seja, **g(t)=(2cos(t)+4,0,2sen(t))**. Coloque **m = –3,14** e **n = 3,14**. Com isso, temos s como sendo um toro circular de revolução de raio menor 2 e raio maior 4.



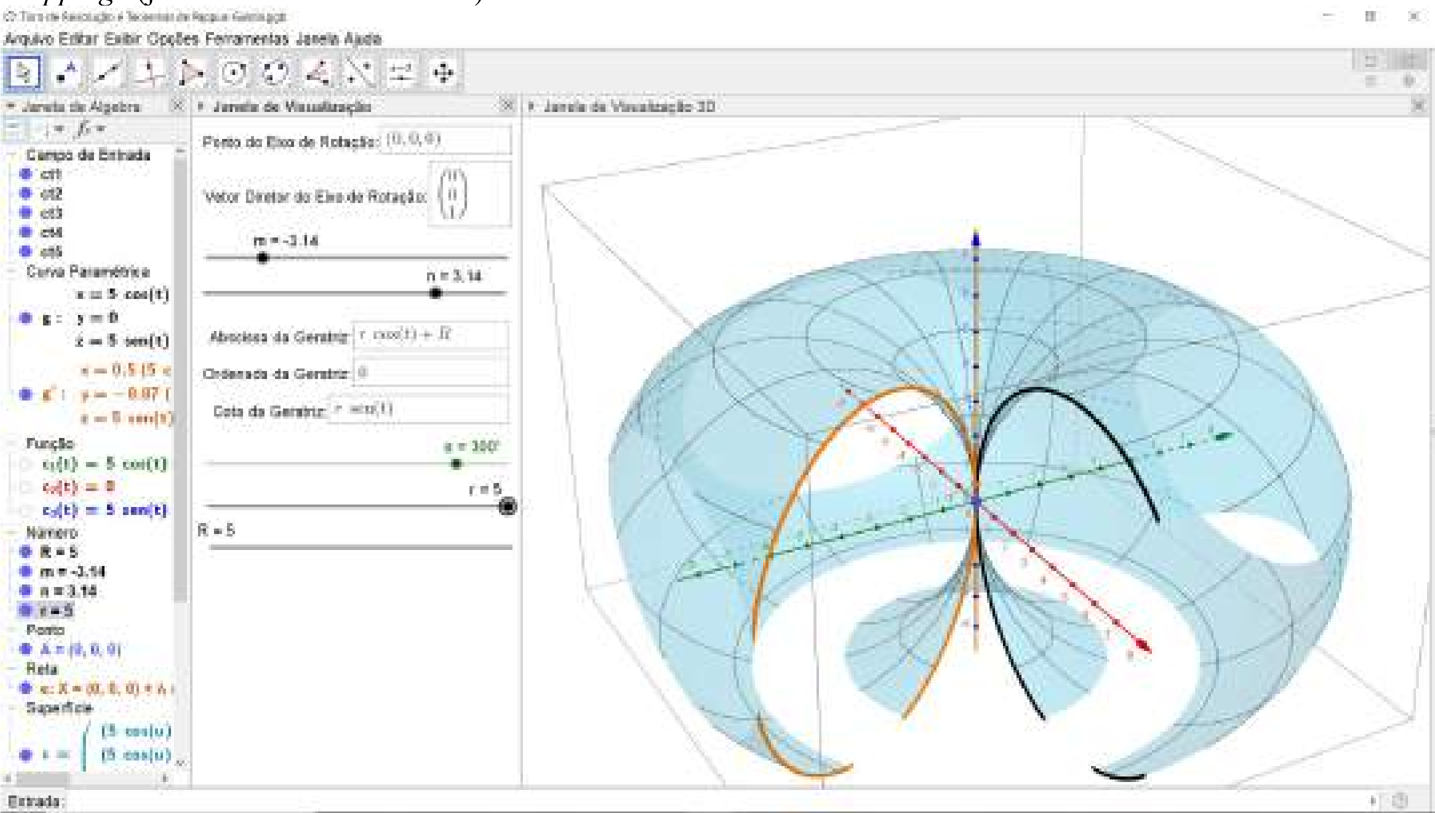
(31) Crie o controle deslizante "**r**", com variação de 0,1 até 5 e incremento 0,01. Crie, também o controle deslizante "**R**", com variação de r até 5 e incremento 0,01. Estes dois controles deslizantes representam os raios menor e maior do toro, respectivamente. Observe que r ≤ R. Coloque r = 2 e R = 4.



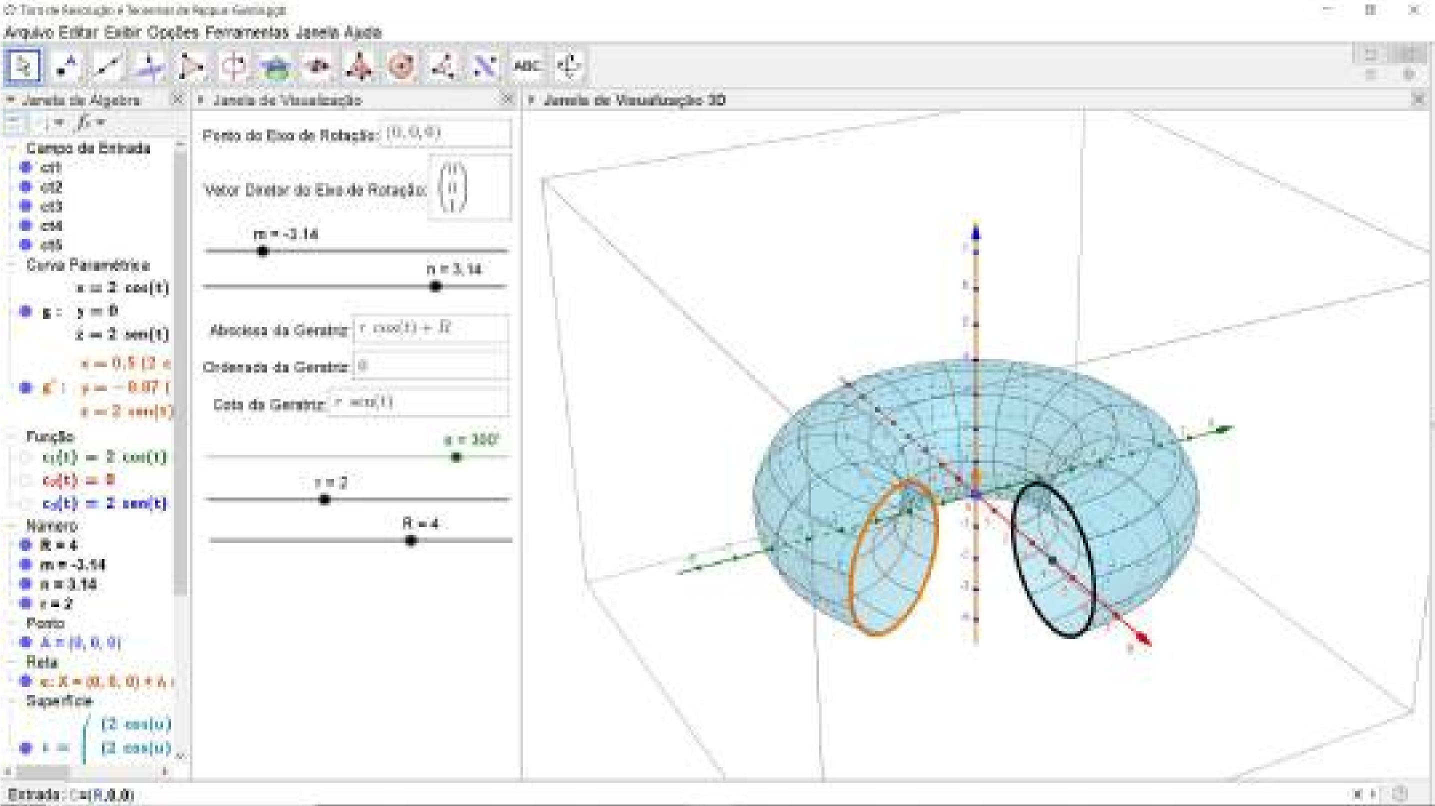
(32) No campo de entrada da abscissa de **g** digite **rcos(t)+R**. No campo de entrada da cota de **g** digite **rsen(t)**. Varie os controles deslizantes "**r**" e "**R**" e veja o efeito geométrico.



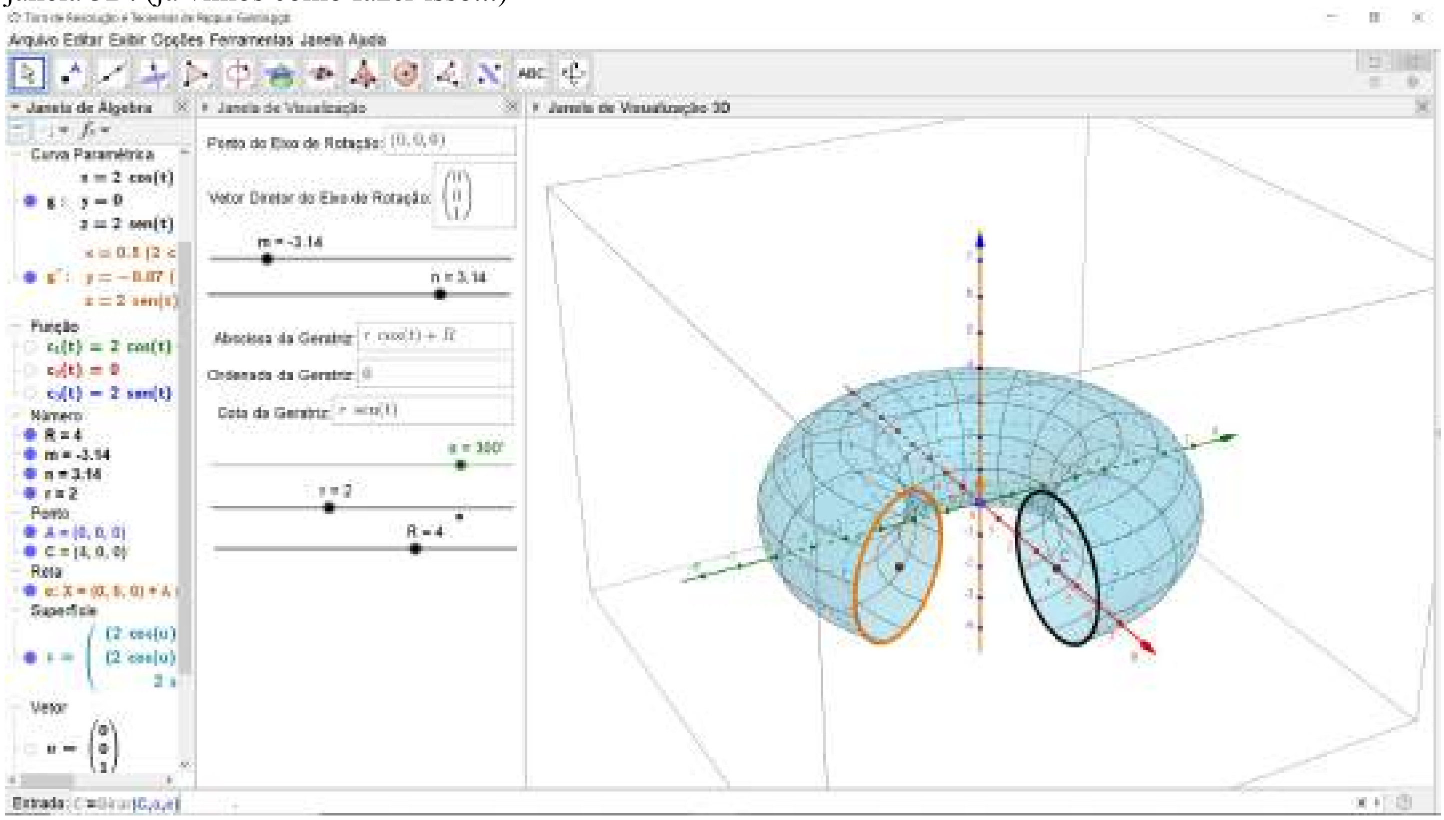
(33) Quando fazemos r = 5, provavelmente teremos cortes na superfície **s** (já vimos esse problema acontecer na oficina de planificação). Para a construção ficar visualmente melhor quando isso acontece, habilite e use o "*clipping*" (já vimos como fazer isso...).



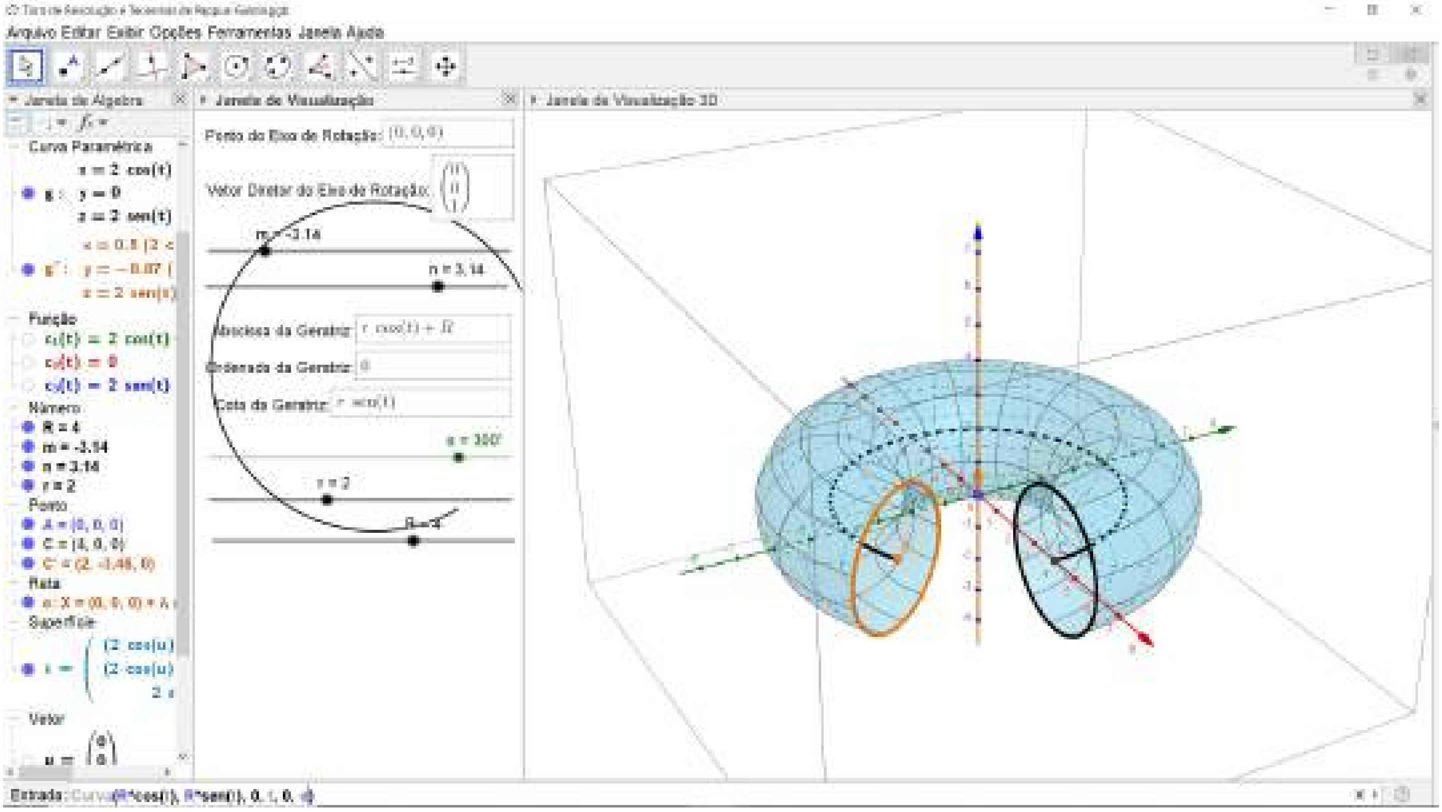
(34) Volte para r = 2 e R = 4. Crie o centro da geratriz **g** (que é um círculo), ou seja, na linha de entrada de comandos digite **C=(R,0,0)** e tecle « Enter ». Configure C para que apareça apenas na janela 3D. (já vimos como fazer isso...). **C é o centroide de g**.



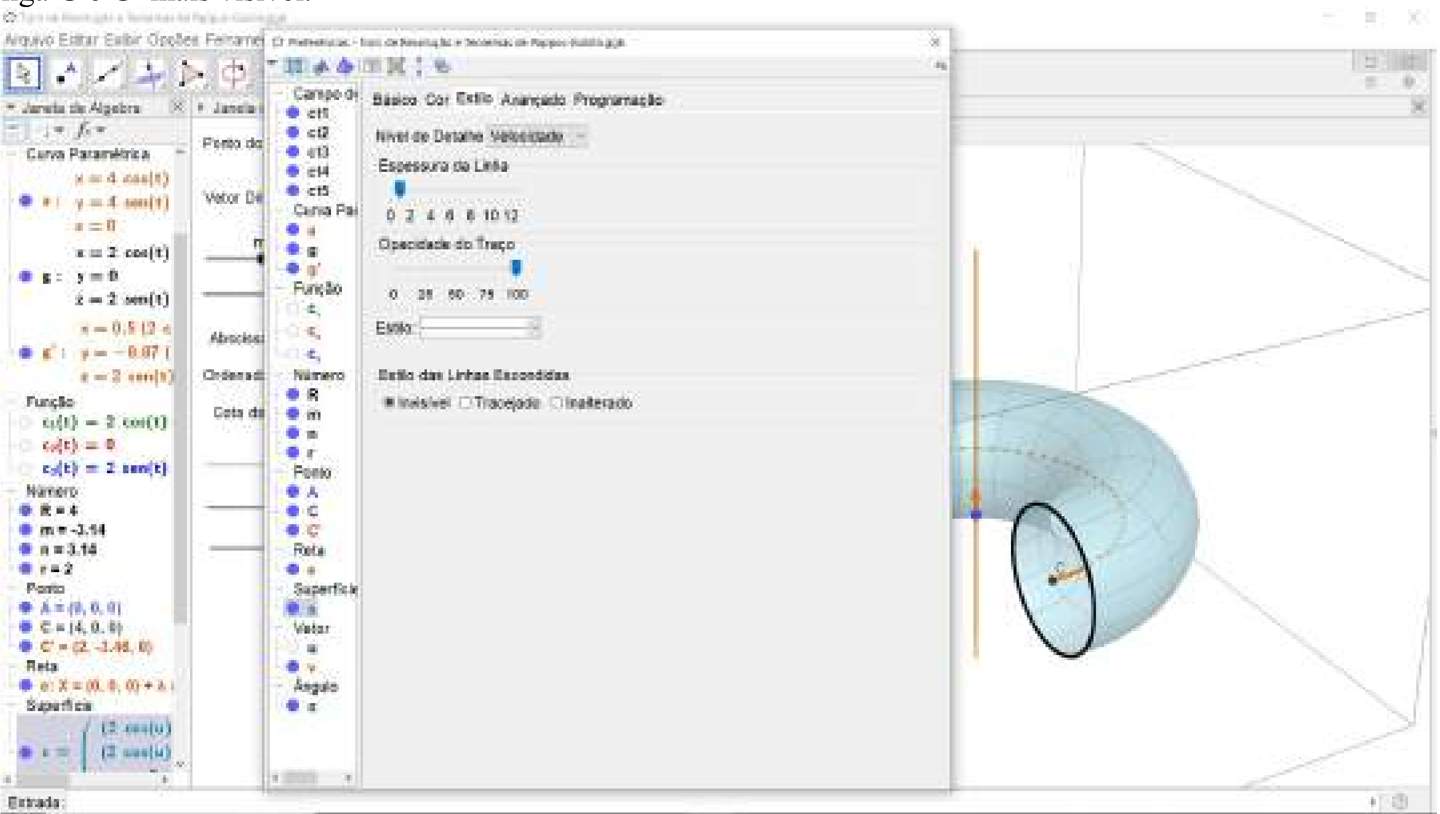
(35) Crie o centro da geratriz girada **g'** (que também é um círculo), ou seja, na linha de entrada de comandos digite **C'=Girar(C,α,e)** e tecle « Enter ». Coloque C' na cor laranja. Configure C' para que apareça apenas na janela 3D. (já vimos como fazer isso...)



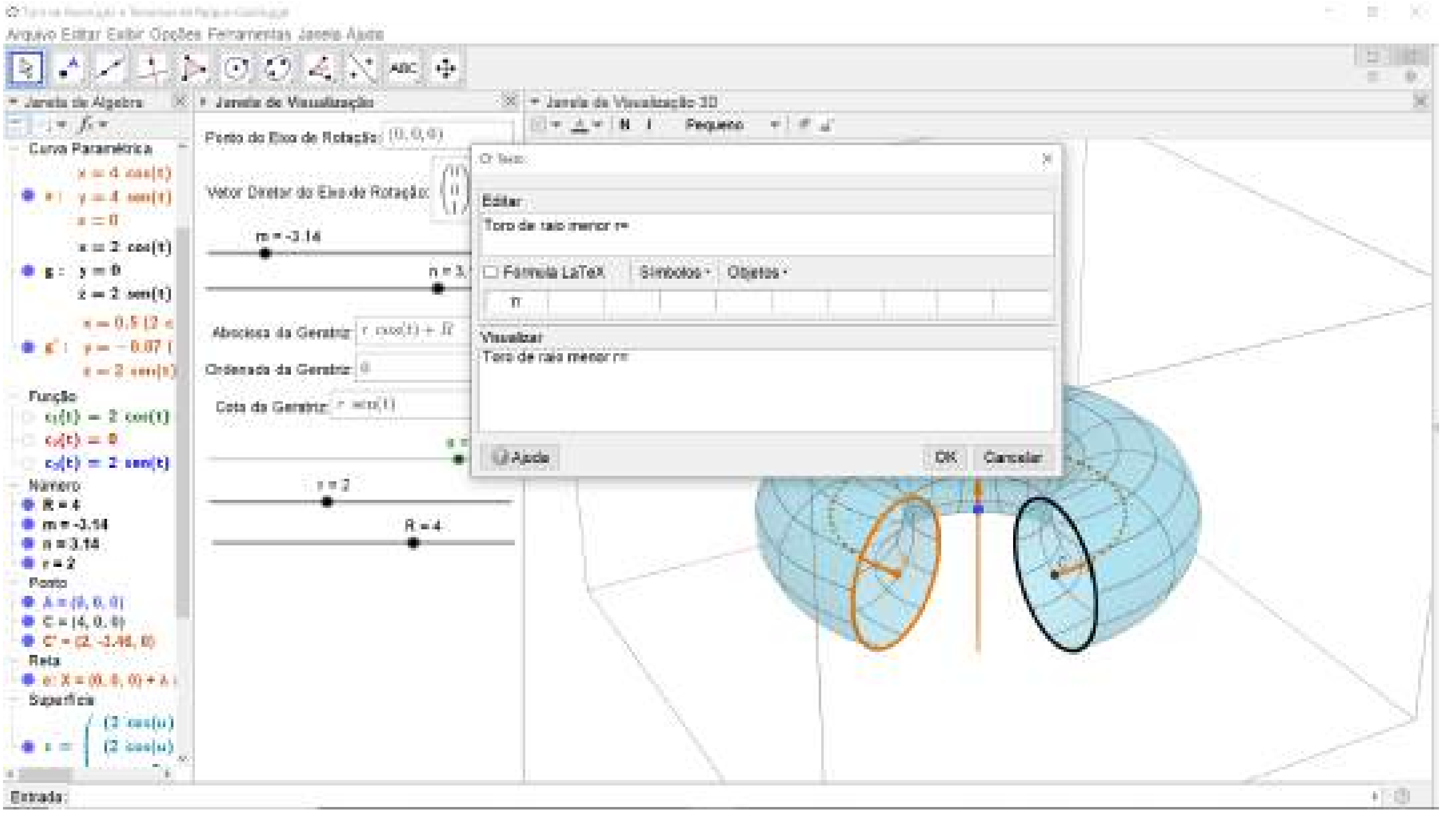
(36) Na linha de entrada de comandos, digite **Curva(R*cos(t),R*sen(t),0,t,0,α)** e tecle « Enter ». Isto gerará um arco de círculo ligando o centroide **C** ao ponto **C'**. Coloque este arco na cor laranja e configure-o para aparecer apenas na janela 3D (já vimos como fazer isso).



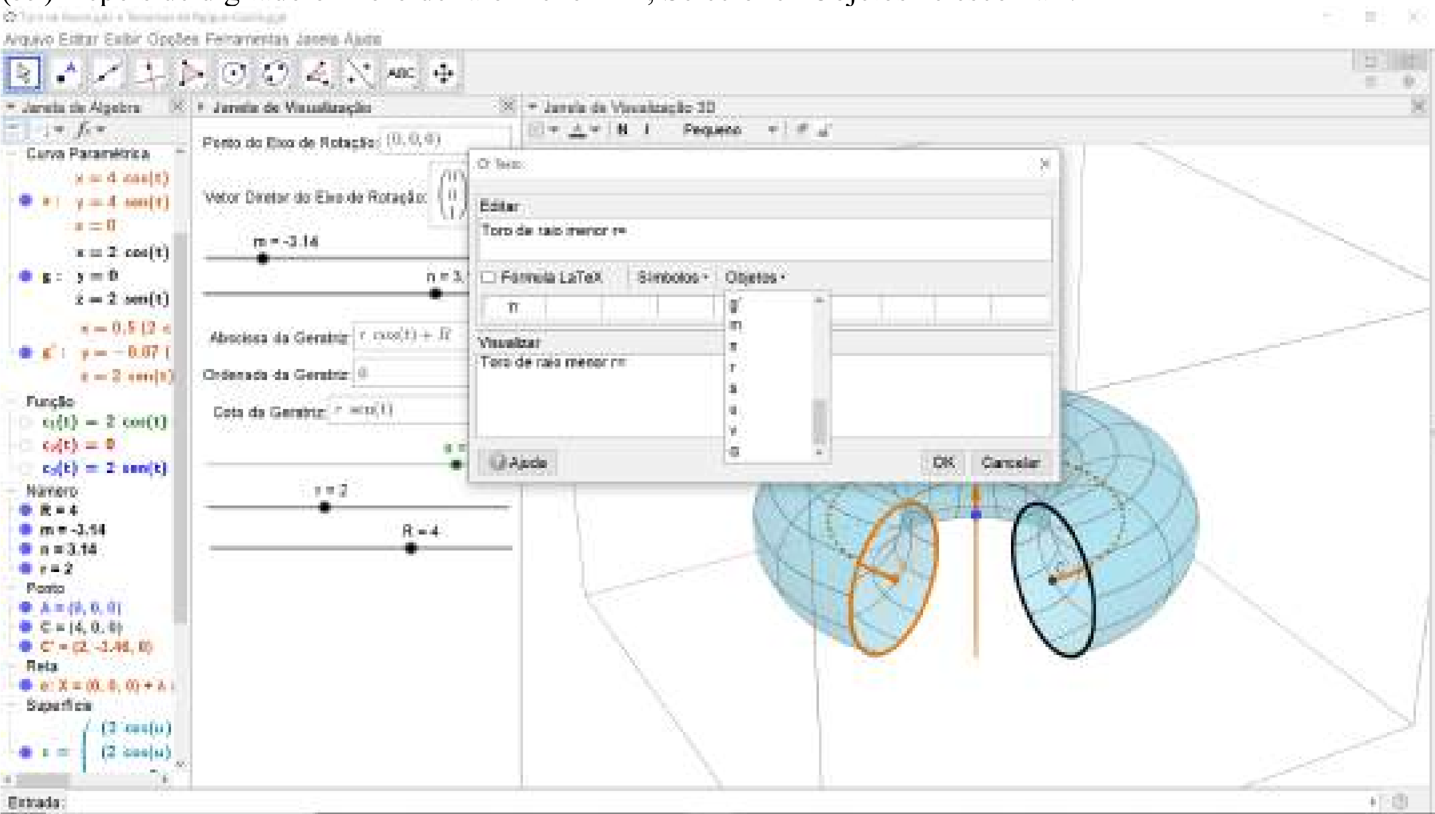
(37) Nas propriedades da superfície **s**, na aba "*Estilo*", no item "*Estilo das Linhas Escondidas*", marque a opção "*Invisível*". Isto fará com que apenas as linhas de contorno "na frente" do campo de visão da superfície **s** fiquem visíveis. Este procedimento "limpa" um pouco as linhas da superfície **s** e deixa o arco de círculo que liga **C** e **C'** mais visível.



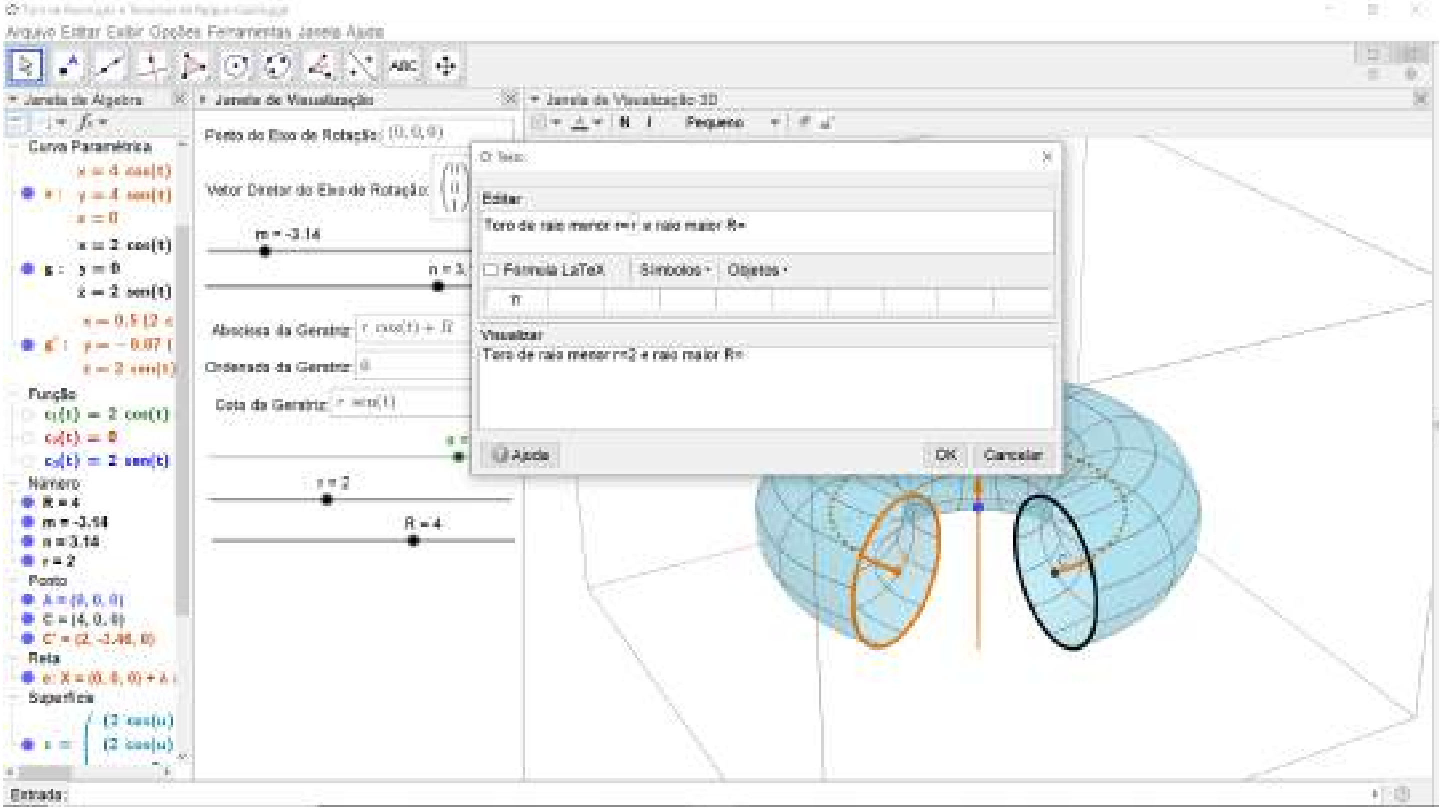
(38) Clique na janela 2D e, na barra de ferramentas, selecione a ferramenta “*Texto*”. Na janela de edição digite: **Toro de raio menor r=**



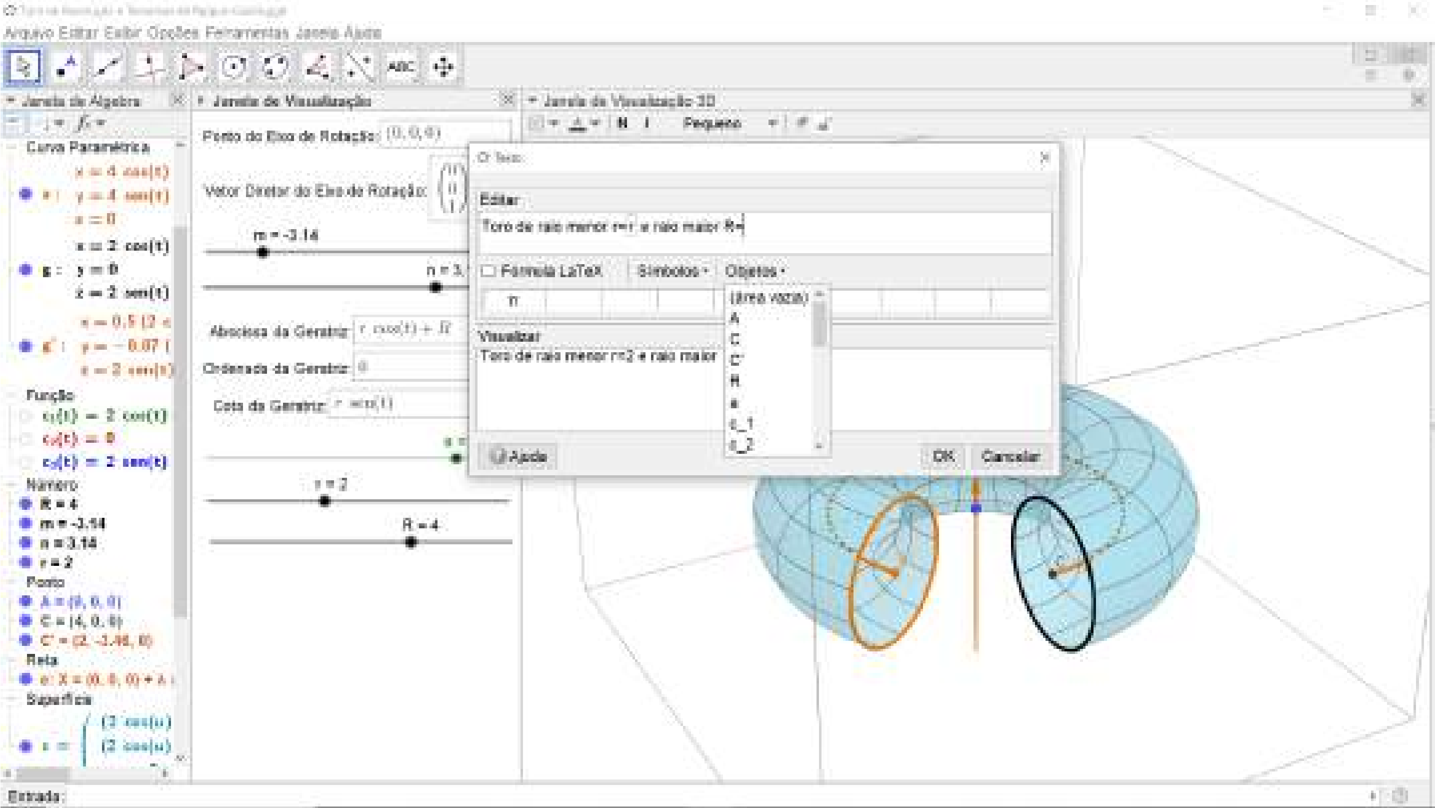
(39) Depois de digitado o “Toro de raio menor r=”, Selecione “Objetos” e escolha **r**.



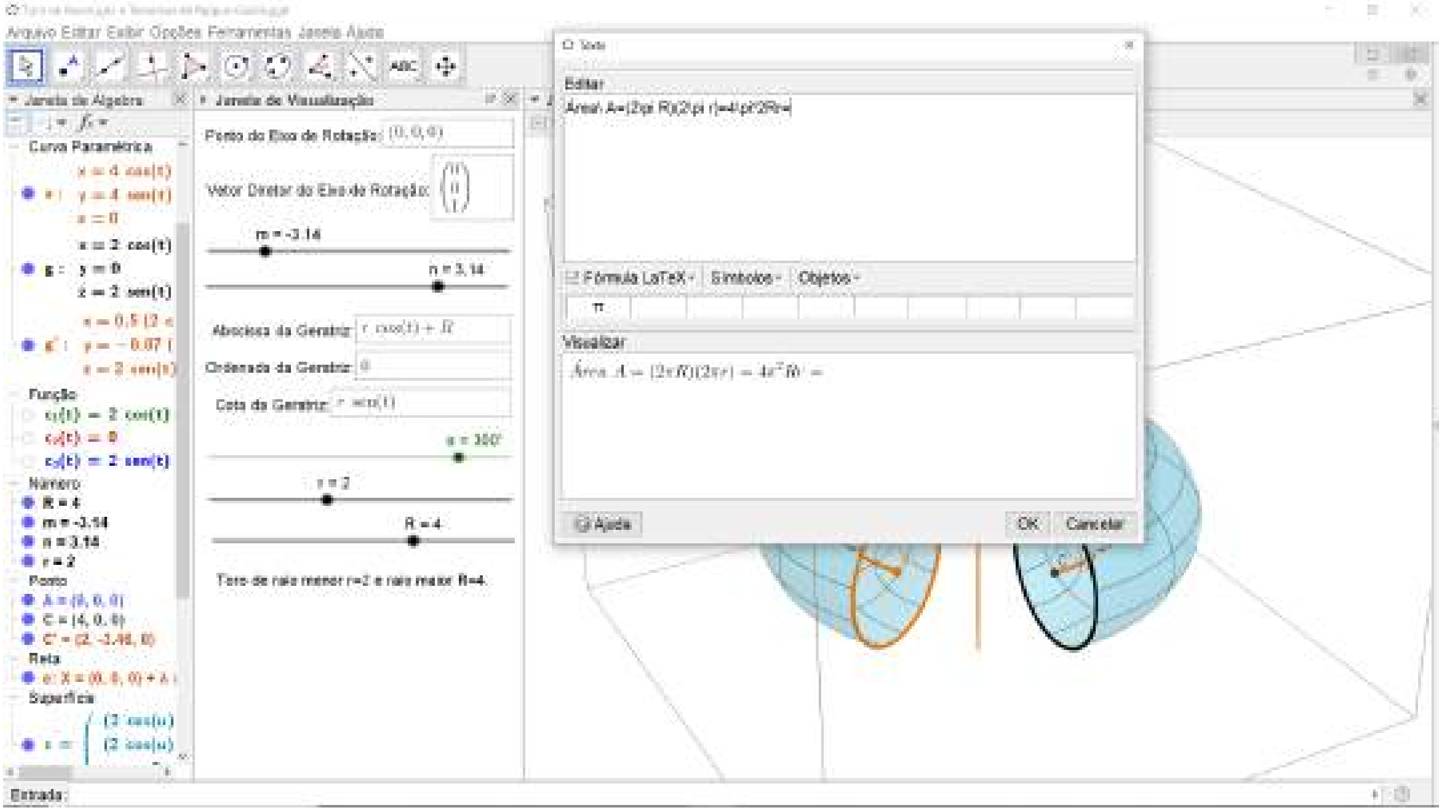
(40) Continue a digitação: **Toro de raio menor r=**(valor do r) **e raio maior R=**



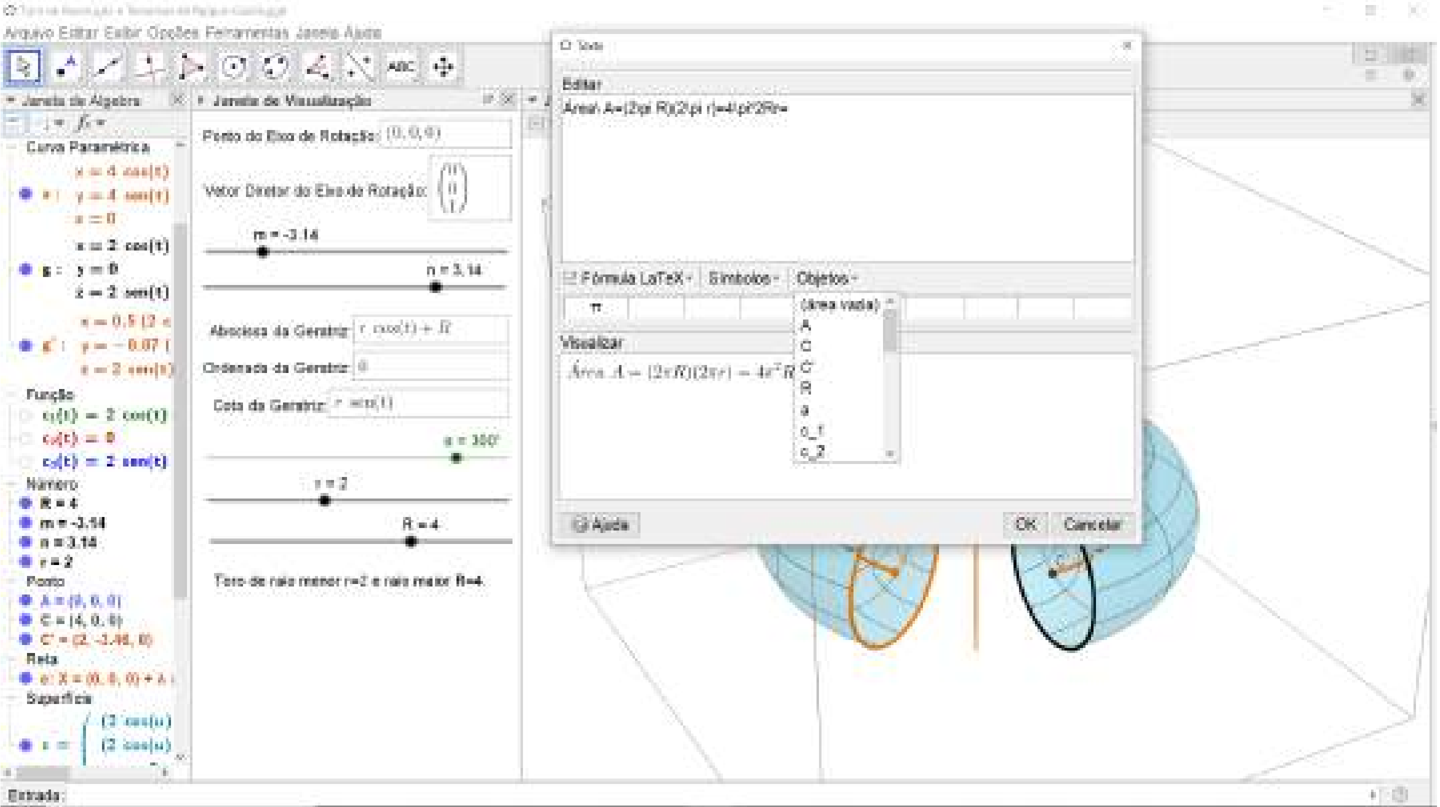
(41) Depois de digitado o "...e raio menor R=", Selecione "Objetos" e escolha **R**. Complete a digitação com um ponto final. Clique em "*OK*".



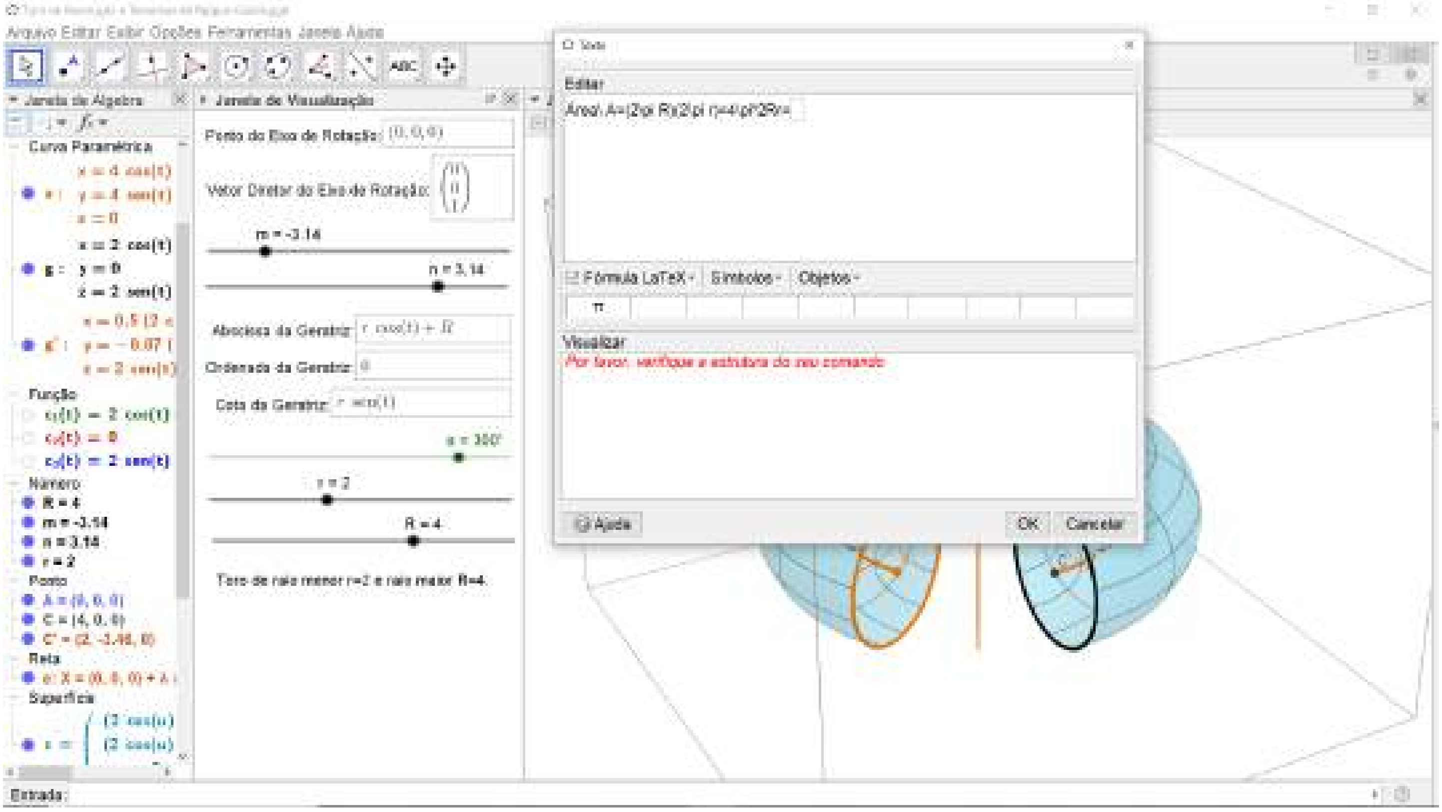
(42) Agora, um pouquinho de LaTeX: crie um texto com os seguintes comandos:
Área\ A=(2\pi R)(2\pi r)=4\pi^2Rr=



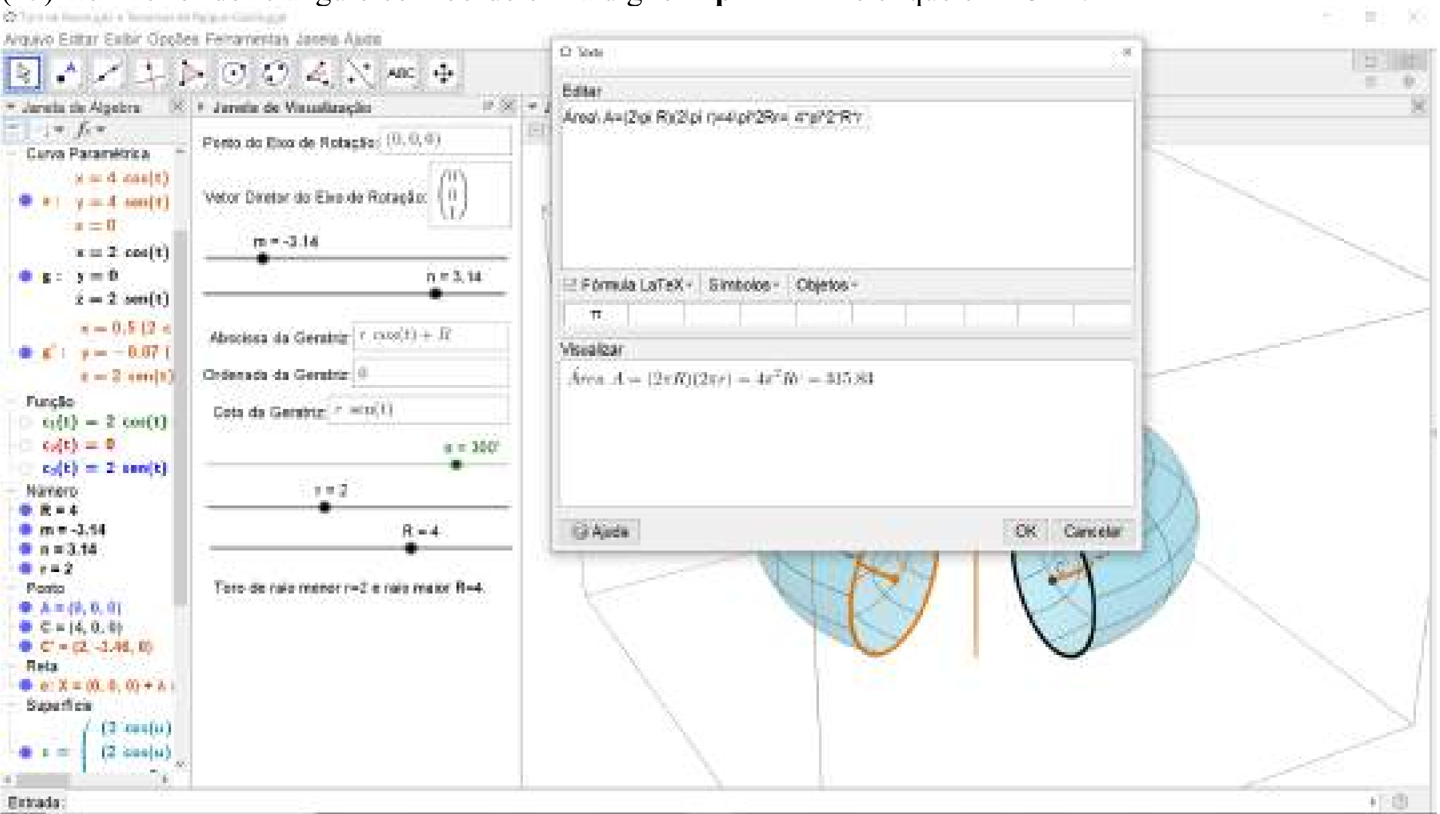
(43) Depois de digitado o "...4\pi^2Rr=", Selecione "*Objetos*" e escolha "(área vazia)". Irá aparecer um retângulo com bordo cinza, que é para digitar comandos GeoGebra em seu interior.



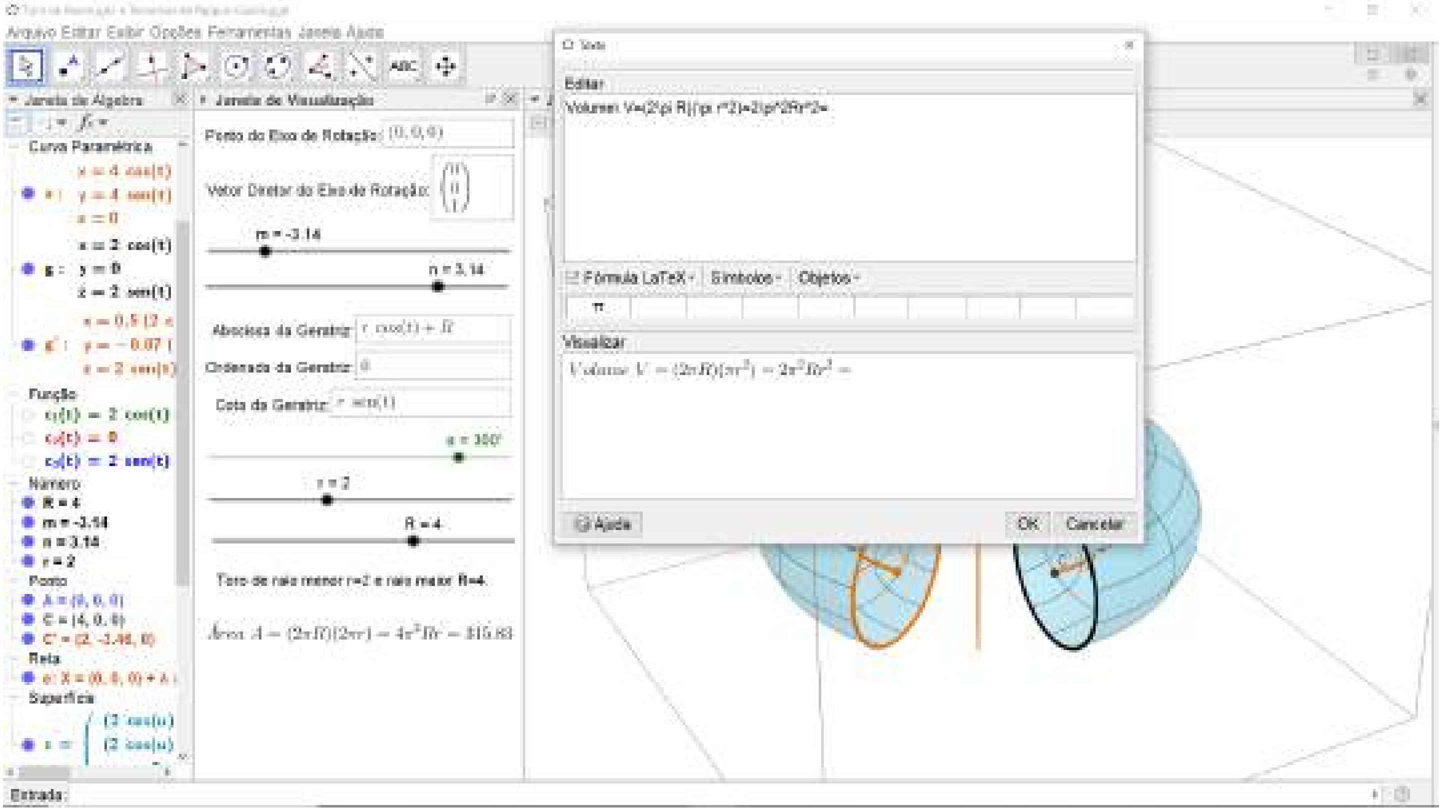
(44) Eis o retângulo de bordo cinza. Ignore a mensagem de erro que aparece na área de visualização da edição de texto.



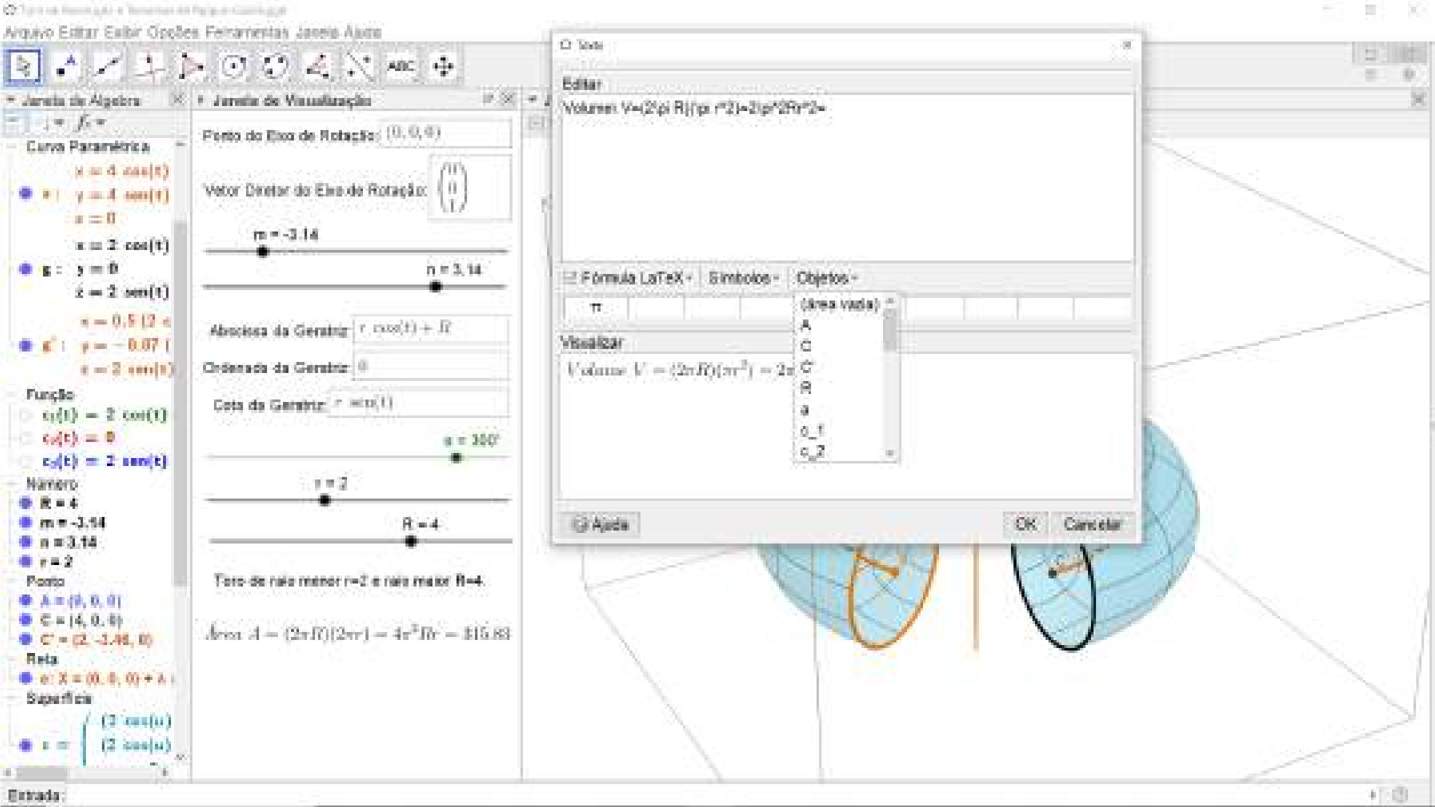
(45) No interior do retângulo com bordo cinza digite **4*pi^2*R*r** e clique em "*OK*".



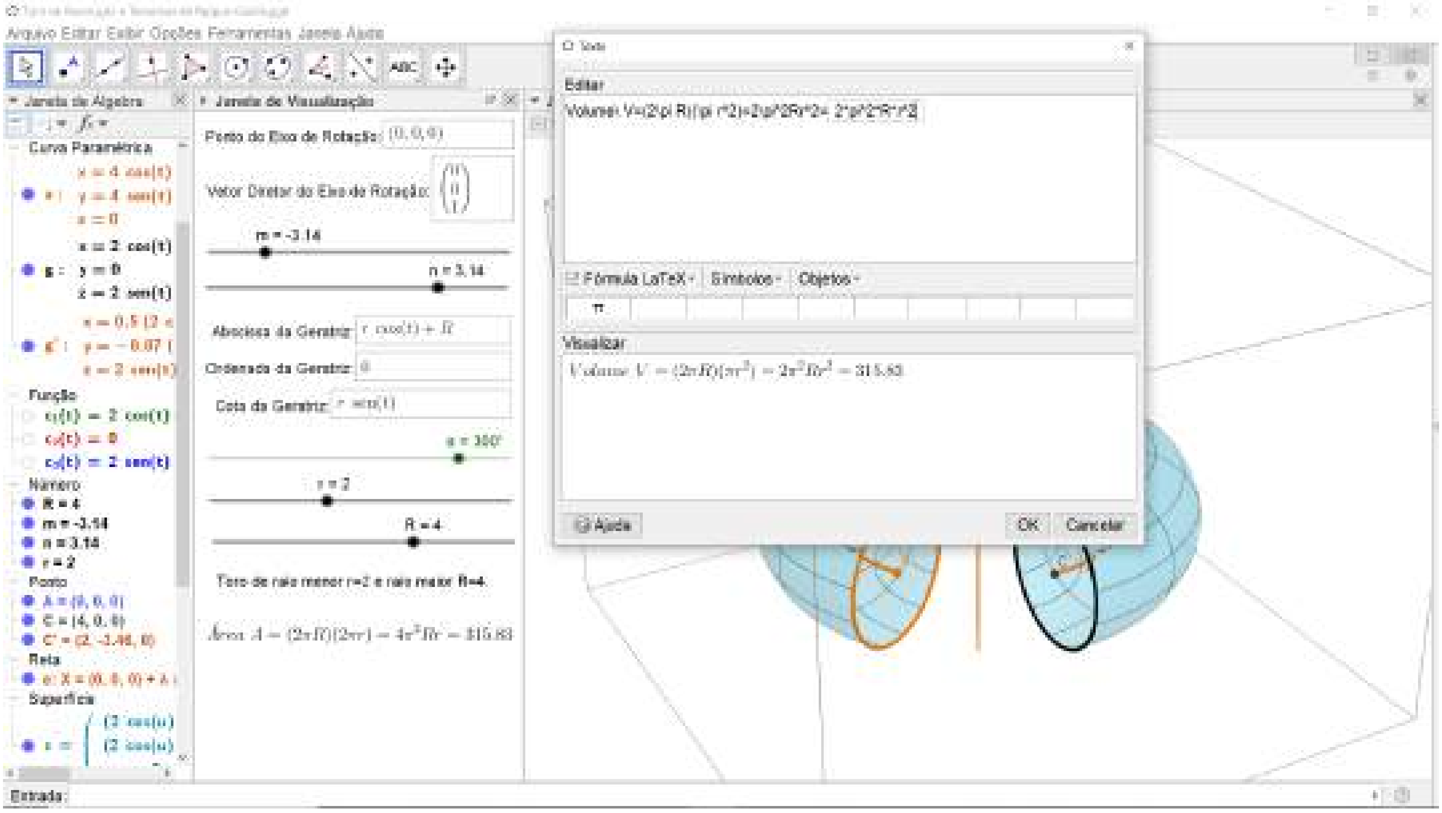
(46) Crie um texto com os seguintes comandos: **Volume\ V=(2\pi R)(\pi r^2)=2\pi^2Rr^2=**



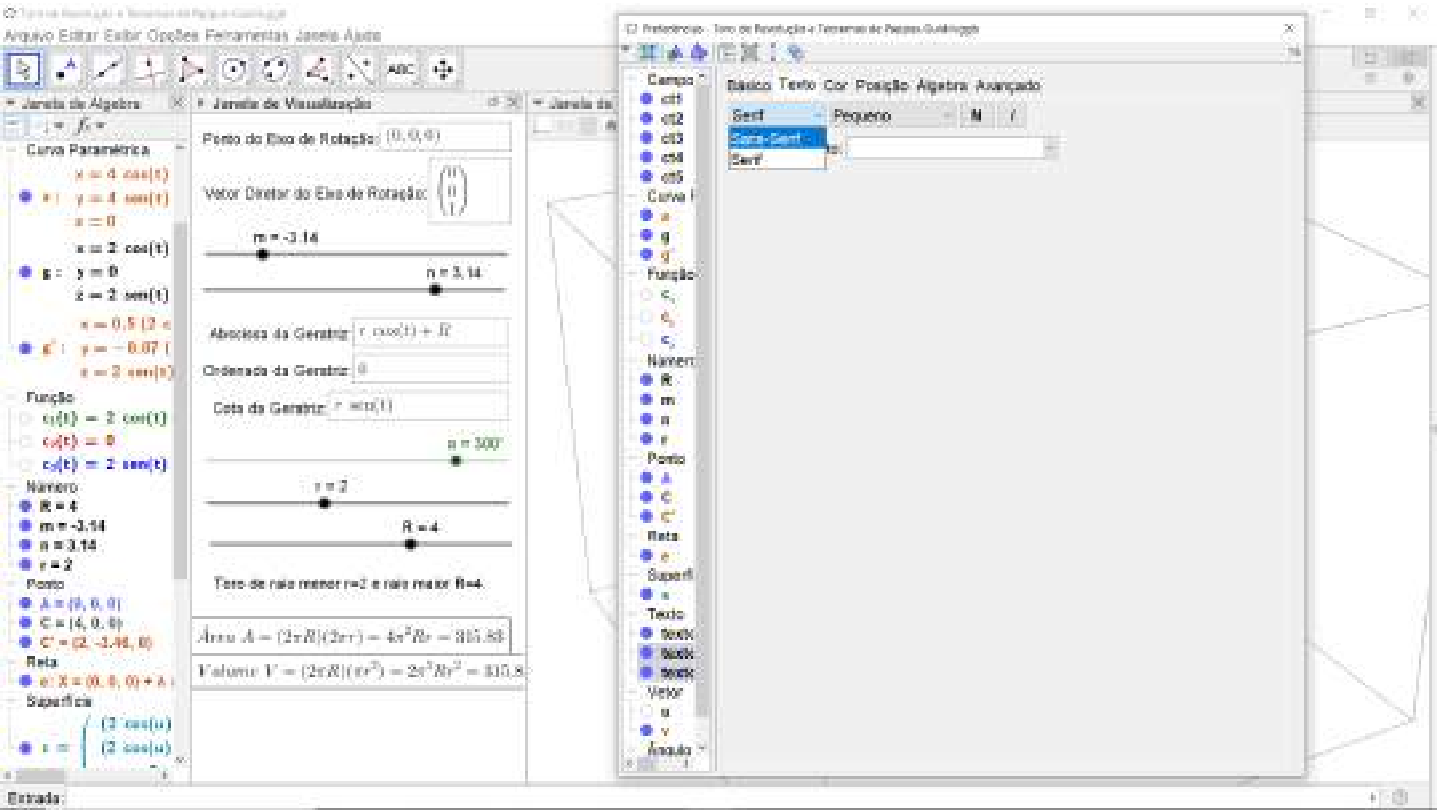
(47) Depois de digitado o “...2\pi^2Rr^2=”, Selecione “*Objetos*” e escolha “(área vazia)”. Irá aparecer um retângulo com bordo cinza.



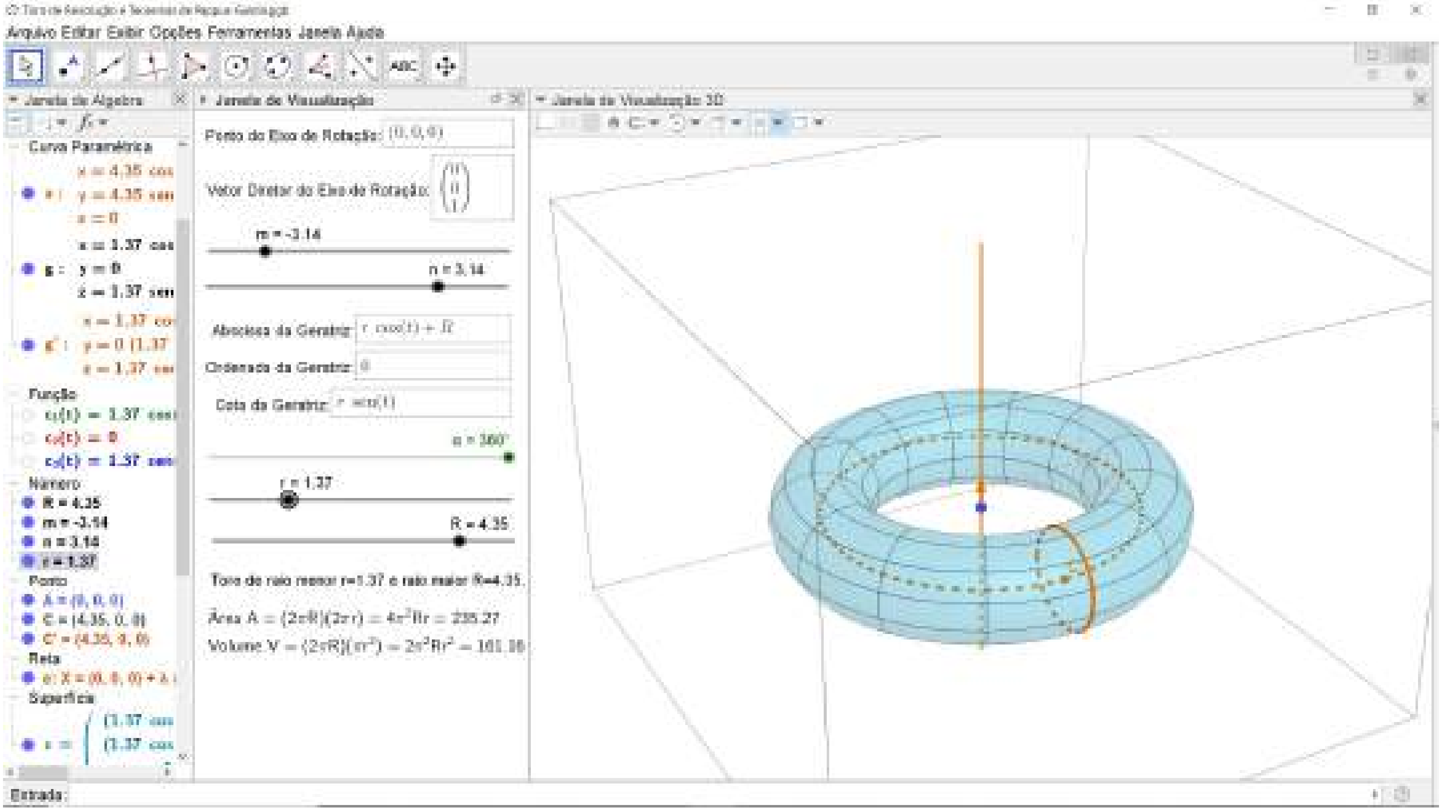
(48) No interior do retângulo com bordo cinza digite **2*pi^2*R*r^2** e clique em “*OK*”.



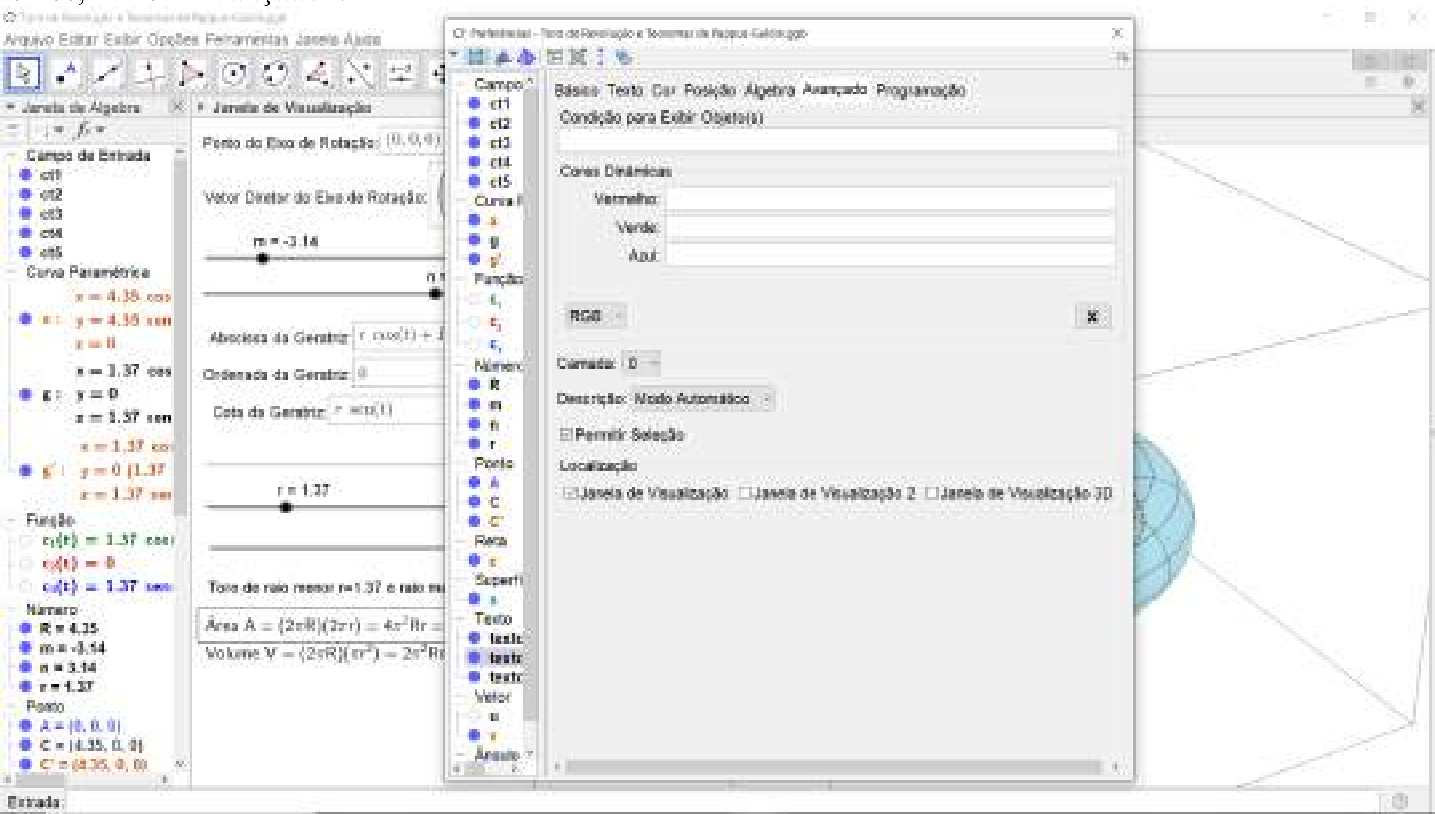
(49) Nas preferências dos textos de área e volume, vá na aba “*Texto*” e selecione “*Sans-Serif*”, para que o tipo de letra dos textos de área e de volume do toro fique semelhante ao tipo de letra que está sendo utilizado nos demais textos.



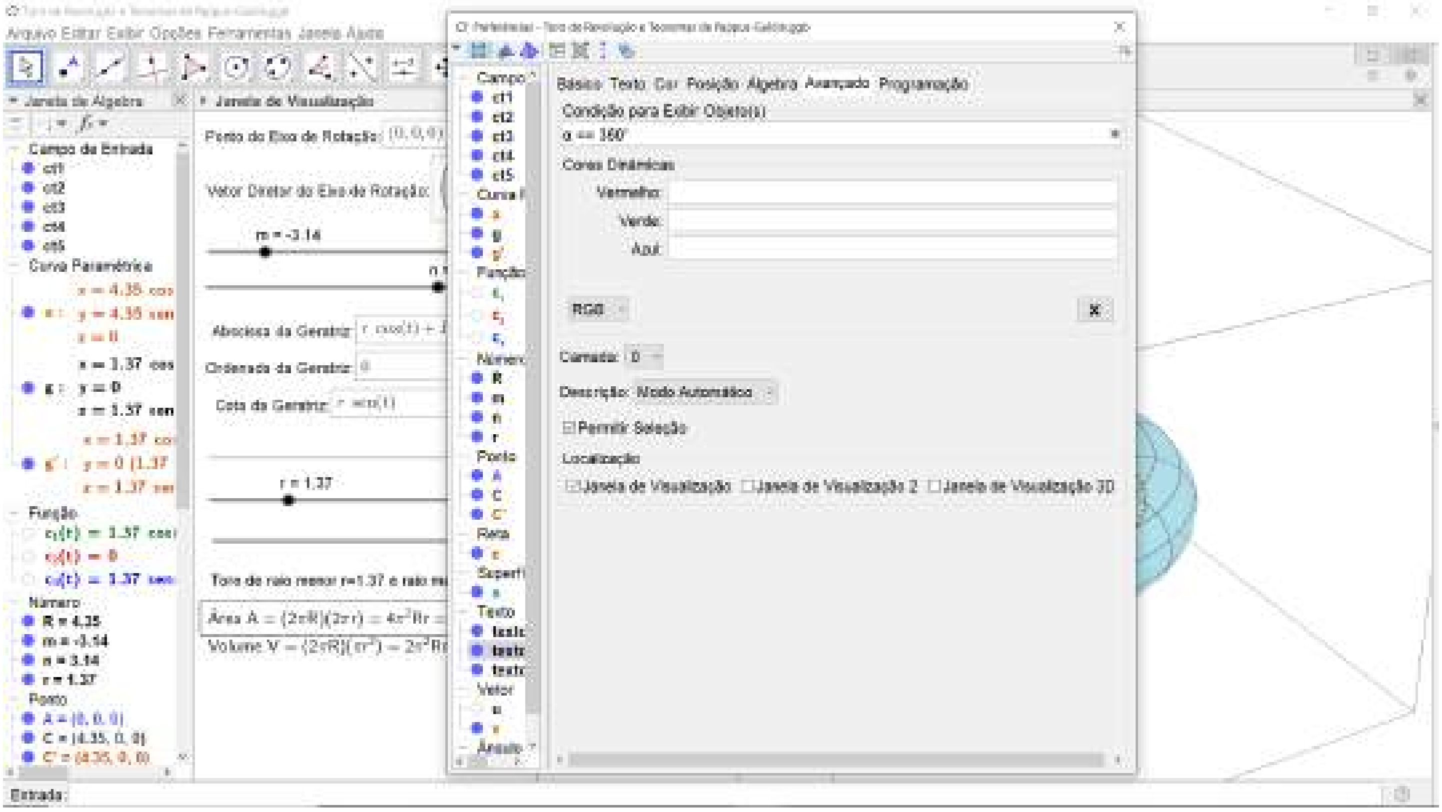
(50) A área e o volume oriundos dos *Teoremas de Pappus-Guldin* são para o toro "inteiro", ou seja, para α=360°. Agora, varie os controles deslizantes "**r**" e "**R**" e observe a variação da área e do volume do toro. Observe que para r=2 temos a área o volume numericamente iguais!



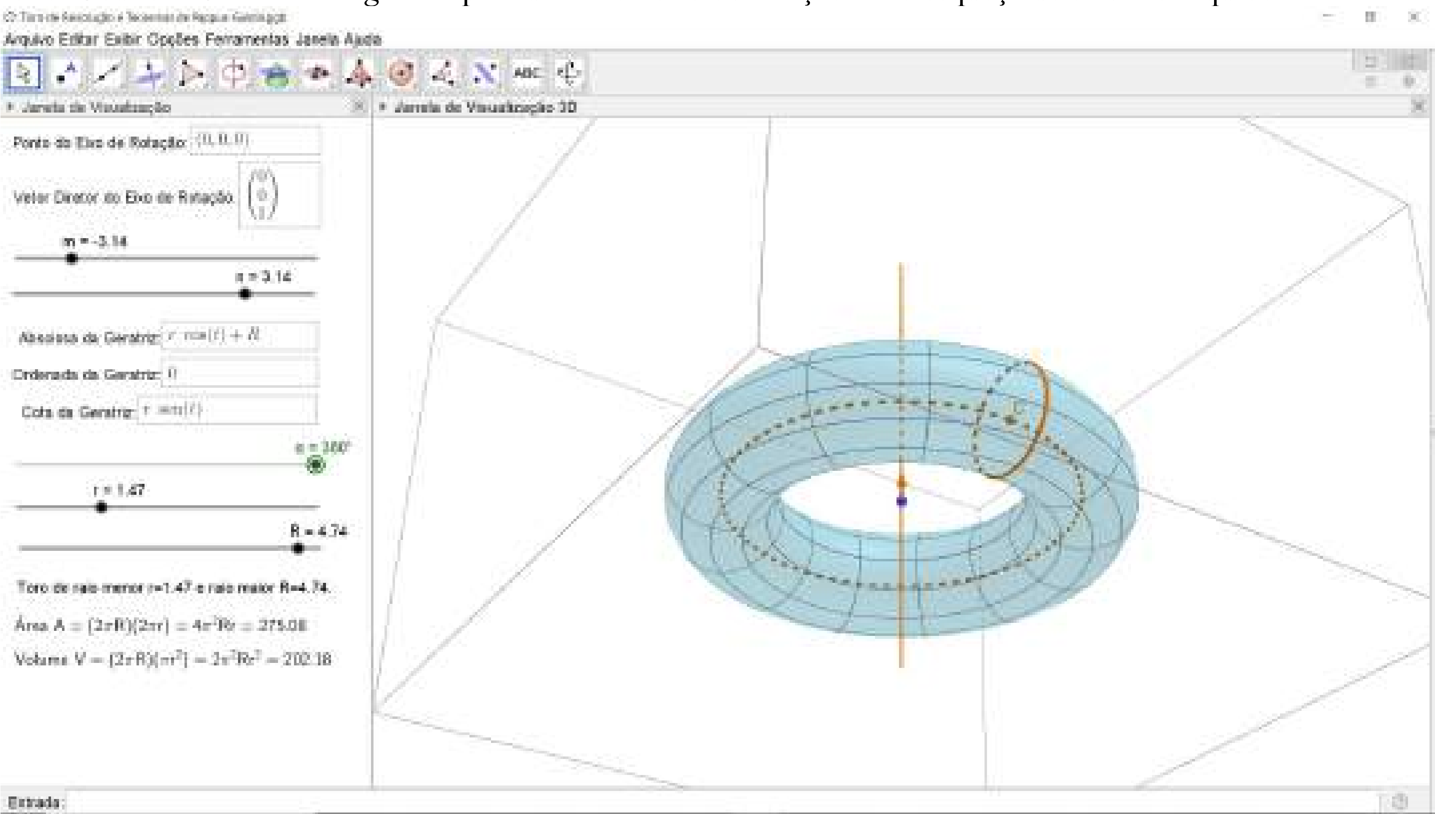
(51) Para fazer os textos da área e do volume aparecerem apenas quando α=360°, vá nas propriedades destes textos, na aba "*Avançado*".



(52) Na linha “*Condição para Exibir Objeto(s)*”, digite **α==360°** (dois sinais de igual) e tecle « Enter ».



(53) Pronto! Seu arquivo dinâmico com área e volume do toro utilizando os *Teoremas de Pappus-Guldin* está feito. Oculte a “*Janela de Álgebra*” para uma melhor visualização. Não esqueça de salvar o arquivo final.



Um passo adiante: um bom desafio complementar é criar textos dinâmicos com a área e o volume do sólido **s** (que forma o toro) em função de α, ou seja, área e volume do sólido **s** para valores de α diferentes de 360°.

FIM DA PARTE 2