Una brevissima introduzione sulle matrici. Data una generica matrice A di dimensioni 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

il suo determinante è il numero

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Se la matrice A è 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

il suo determinante, sviluppato secondo la prima riga, si ottiene ricorsivamente moltiplicando ogni elemento della prima riga, a segni alterni, per il determinante della sottomatrice di A ottenuta eliminando riga e colonna corrispondenti all'elemento selezionato:

$$\det(A) = a_{11} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

Per esempio se

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

allora

$$\begin{aligned} \det(M) =& 2 \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ =& 2 \cdot (-4 - 0) - 3 \cdot (2 - 0) - 2 \cdot (-1 - 0) = -8 - 6 + 2 = -12 \end{aligned}$$

Un'importante proprietà dei determinanti è la seguente.

Proprietà *Se una matrice quadrata ha due righe che sono una multiplo dell'altra, allora ha determinante nullo.*

Dimostrazione Sia per esempio

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Allora

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11} \cdot \det \begin{pmatrix} ka_{32} & ka_{33} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \cdot \det \begin{pmatrix} ka_{31} & ka_{33} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \cdot \det \begin{pmatrix} ka_{31} & ka_{32} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \\ &= a_{11}(ka_{32} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot ka_{33}) - a_{12}(ka_{31} \cdot a_{33} - a_{31} \cdot ka_{33}) + a_{13}(ka_{31} \cdot a_{32} - a_{31} \cdot ka_{32}) \\ &= ka_{11}(a_{32} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{33}) - ka_{12}(a_{31} \cdot a_{33} - a_{31} \cdot a_{33}) + ka_{13}(a_{31} \cdot a_{32} - a_{31} \cdot a_{32}) = 0 \end{aligned}$$

$\square$

Un vettore di $\mathbb{R}^3$ può essere scritto, oltre che come terna di numeri, utilizzando i versori relativi agli assi cartesiani. Per esempio

$$\mathbf{v} = (2, 3, -4) = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$$

dove

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \qquad \mathbf{j} = (0, 1, 0), \qquad \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

Utilizzando questa scrittura possiamo definire il prodotto vettoriale tra due vettori $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Il prodotto vettoriale tra vettori da come risultato un vettore ottenibile nel seguente modo:

$$\boxed{\text{PRODOTTO VETTORIALE tra } \mathbf{u} \text{ e } \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}}$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= i \det \begin{pmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{pmatrix} - j \det \begin{pmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{pmatrix} + k \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \\ &= \left(\det \begin{pmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{pmatrix}, \ -\det \begin{pmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{pmatrix}, \ \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$