Teoría – Tema 3

Teoría - 3 - infinitésimos

¿Qué son los infinitésimos?

Una función $f(x)$ toma un valor **infinitésimo** en a si el límite de la función en ese punto es cero:

$$f(x)\ es\ infinitésimo\ en\ a \quad \text{si y solo si} \quad \lim_{x \to a} f(x)=0$$

Conforme nos acercamos al punto $x=a$ la función toma un valor infinitesimalmente pequeño (prácticamente 0). Y este comportamiento de $f(x)$ en a coincide, en algunos casos prácticos que veremos más adelante, con el comportamiento de funciones “más sencillas” a las que podemos aproximar $f(x)$ cuando estudiemos su valor en a .

$$f(x)\ se\ comporta\ como\ g(x)\ en\ a \ \rightarrow\ f(x) \simeq g(x)\ en\ a \quad \text{si y solo si} \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \rightarrow 1$$

Es decir: $f(x)$ va a 0 con la “misma rapidez” con que lo hace su aproximación $g(x)$ en a . Y si la forma analítica de $g(x)$ es más sencilla que la forma de $f(x)$, puede ser más práctico emplear $g(x)$ en vez de $f(x)$ a la hora de operar con otras funciones, calcular límites, etc.

¿Cómo obtener la **forma analítica de esta aproximación** $g(x)$?

Una posible respuesta a esta pregunta son los **polinomios de Taylor**. Nosotros los vamos a utilizar para estudiar el comportamiento de $f(x)$ en el punto $a=0$.

Como ya aplicamos en la definición de derivada sobre funciones elementales, los polinomios de Taylor son muy útiles a la hora de aproximar funciones elementales $f(x)$ a polinomios $(x-x_0)^n$ (llamados series de potencias).

Cuántos más términos tomemos en la serie de potencias, más precisa será la aproximación y más se parecerá la curva del polinomio de Taylor a la curva de la función original $f(x)$.

El valor x_0 que aparece en $(x-x_0)^n$ pertenece al dominio de la función $f(x)$ y es el punto alrededor del cual se desarrolla la serie de potencias. Por facilidad en los cálculos, es común tomar $x_0=0$ como centro de la serie de potencias.

Si tras aproximar $f(x)$ al polinomio de Taylor centrado en $x_0=0$, tomamos $x \rightarrow 0$ (donde x aparece en el argumento de la función $f(x)$ y en el argumento del polinomio de Taylor) podremos **truncar la serie de potencias** del polinomio de Taylor y quedarnos (en determinados casos) con los términos más grandes, “despreciando” los términos más pequeños. Esta serie truncada nos dará la aproximación $g(x)$.

Así estimaremos que $f(x)$ **tiende de manera asintótica** a $g(x)$ cuando $x \to 0$.

A continuación mostramos, siguiendo este razonamiento, los valores $g(x)$ a los que podemos aproximar determinadas funciones elementales en las proximidades de $x=0$.

Infinitésimo de la exponencial y el logaritmo para *x→0*

La función exponencial se aproxima como serie de potencias a:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...$$

Por lo tanto: si $x\rightarrow 0 \rightarrow 1+x\gg\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+... \rightarrow e^x\simeq 1+x \rightarrow e^x-1\simeq x$

Es decir: e^x-1 se comporta asintóticamente en $x\rightarrow 0$ como x . O lo que es lo mismo: e^x se comporta asintóticamente en $x\rightarrow 0$ como $1+x$.

El logaritmo no podemos evaluarlo en 0, pero sí en 1. Por lo tanto:

$$\ln(x+1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...$$

Por lo tanto: si $x\rightarrow 0 \rightarrow x\gg\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+... \rightarrow \ln(x+1)\simeq x$

Es decir: $\ln(x+1)$ se comporta asintóticamente en $x\rightarrow 0$ como x .

Infinitésimo de las funciones seno, coseno y tangente para $x \to 0$

Las funciones seno y coseno aproximan a los polinomios de Taylor siguientes:

$$sen(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots$$

$$\cos(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots$$

Para valores próximos a cero, podemos realizar las siguientes aproximaciones:

$$x\to 0 \;\to\; x \gg \frac{-x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots \;\to\; sen(x)\simeq x$$

$$x\to 0 \;\to\; 1 \gg \frac{-x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots \;\to\; \cos(x)\simeq 1 \;\to\; \cos(x)-1\simeq 0$$

Y la función tangente podemos expresarla como cociente de la función seno y la función coseno:

$$tg(x)=\frac{sen(x)}{\cos(x)} \;\to \text{si}\;\; x\to 0 \;\to\; tg(x)\simeq x$$

Además, en el estudio de límites aparecen con frecuencia las siguientes expresiones, que podemos aproximar a infinitésimos haciendo uso de las series de potencia del seno y el coseno:

$$1-\cos(x) \;\to \text{si}\;\; x\to 0 \;\to\; 1-\cos(x)\simeq\frac{x^2}{2}$$

$$arcosen(x) \;\to \text{si}\;\; x\to 0 \;\to\; arcosen(x)\simeq x$$

$$arcotg(x) \;\to \text{si}\;\; x\to 0 \;\to\; arcotg(x)\simeq x$$

Infinitésimo de la potencia y la raíz n-ésima para *x→0*

La potencia $f(x)=(1+x)^n$ podemos aproximarla al polinomio de Taylor:

$$(1+x)^n=1+n\cdot x+\frac{n\cdot(n-1)}{2!}x^2+\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{3!}x^3+\ldots+\frac{n!}{n!}x^n$$

Donde el valor de la derivada de orden $n+1$ es 0 para un polinomio de grado x^n , por lo que los términos de la serie de potencias se hacen nulos desde x^{n+1} en adelante.

Por lo tanto: si $x\to 0 \ \to \ 1+n\cdot x \gg \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{3!}x^3+\ldots+\frac{n!}{n!}x^n \ \to \ (1+x)^n\simeq 1+n\cdot x$

Para la raíz n-ésima $f(x)=\sqrt[n]{1+x}$ tendremos la siguiente aproximación:

$$\sqrt[n]{1+x}=1+\frac{x}{n}+\frac{1-n}{n^2}x^2+\ldots$$

Por lo tanto: si $x\to 0 \ \to \ 1+\frac{x}{n}\gg\frac{1-n}{n^2}x^2+\ldots \ \to \ \sqrt[n]{1+x}\simeq 1+\frac{x}{n}$

Generalizar el uso de infinitésimos para x tendiendo a valores distintos de 0

Por la propia definición de infinitésimo podemos emplear su aproximación cuando x tienda a valores distintos de 0. Las condiciones que deben mantenerse es que $f(x)$ se haga 0 en el valor x que estemos estudiando, y que el límite del cociente entre $f(x)$ y su aproximación $g(x)$ en $x \to a$ converja a 1 .

De esta manera, según lo demostrado en los apartados anteriores, los siguientes ejemplos son infinitésimos válidos:

si $x \to 1 \ \to \ \ln x \simeq x-1$

si $x \to \frac{\pi}{2} \ \to \ sen(x-\frac{\pi}{2}) \simeq x-\frac{\pi}{2}$

si $x \to 1 \ \to \ e^{(1-x)}-1 \simeq 1-x$

¿Cúando usar la aproximación asintótica de infinitésimos?

Los infinitésimos son una aproximación: cuando $f(x)$ se acerca al punto $x=a$ su valor se hace 0 y su comportamiento se aproxima al de $g(x)$. Y **toda aproximación tiene sus limitaciones**.

Los infinitésimos son muy útiles en el estudio de ciertos límites con indeterminación $\frac{0}{0}$. Su aproximación permite, a veces, eliminar la indeterminación y obtener el resultado final del límite.

¿Cuándo aplicar infinitésimos? Si $f(x)$ se encuentra multiplicando o dividiendo en un límite con $x\rightarrow a$, podremos sustituir $f(x)\simeq g(x)$.

Pero si $f(x)$ se encuentra sumando o restando, por lo general, la aproximación a $g(x)$ no será válida. Solo en casos muy concretos, que aprenderemos con la práctica, podremos sustituir $f(x)$ por su aproximación $g(x)$ dentro de una suma o una resta (siempre y cuando la aproximación tenga sentido al comparar $g(x)$ con el resto de sumandos).

Ejemplo 1 resuelto

Resuelve $\lim_{x\rightarrow 0} \frac{sen(x)+e^x-1}{x}$

si $x\rightarrow 0$ → $\lim_{x\rightarrow 0} \frac{sen(x)+e^x-1}{x}=[\frac{0}{0}]\simeq\lim_{x\rightarrow 0} \frac{x+x}{x}=\lim_{x\rightarrow 0} \frac{2x}{x}=2$

La aproximación del seno y la exponencial por infinitésimos es coherente porque sumamos términos infinitésimos del mismo orden ($x+x$).

Ejemplo 2 resuelto

Resuelve $\lim_{x\rightarrow 0} \frac{x^2-sen^2 x}{x^4}$

si $x\rightarrow 0$ ==> $\lim_{x\rightarrow 0} \frac{x^2-sen^2 x}{x^4}=[\frac{0}{0}]\neq\lim_{x\rightarrow 0} \frac{x^2-x^2}{x^4}=\lim_{x\rightarrow 0} \frac{0}{x^4}=0$ → **aproximación no válida**

Al aproximar $sen(x)$ a su infinitésimo x estamos obviando, entre otros, un término del polinomio de Taylor de grado x^3 que no es despreciable frente al primer término x^2 de la resta del numerador.

¿Qué hacer en estos casos? Recurrir a otros métodos. Por ejemplo, **L'Hôpital**.

$$\lim_{x\rightarrow 0} \frac{x^2-sen^2 x}{x^4}=[\frac{0}{0}]=\lim_{x\rightarrow 0} \frac{2x-2\,sen(x)\cos(x)}{4x^3}=\lim_{x\rightarrow 0} \frac{2x-sen(2x)}{4x^3}=[\frac{0}{0}]$$

$$\lim_{x\rightarrow 0} \frac{2-2\cos(2x)}{12x^2}=[\frac{0}{0}]$$

$$\lim_{x\rightarrow 0} \frac{4sen(2x)}{24x}=[\frac{0}{0}]=\lim_{x\rightarrow 0} \frac{8\cos(2x)}{24}=\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$$