Teoría – Tema 1

Teoría - 7 - inecuaciones de una incógnita

¿Qué es una inecuación?

Una inecuación es una desigualdad matemática con al menos una incógnita.

Resolver la inecuación implica obtener los intervalos de la/las incógnitas que cumplen el sentido de la desigualdad. La solución, por lo general, no será un valor concreto sino un intervalo (o un conjunto de intervalos).

$$x^2+2x+1\geq 3x-2$$

Si a los dos miembros de una inecuación se les suma o resta un mismo número, el resultado es una inecuación equivalente (con la misma solución).

Si se les multiplica o divide por un mismo número positivo, el resultado también es equivalente (con la misma solución).

Pero si se multiplica o divide por un mismo número negativo, la inecuación equivalente resultante cambia de sentido.

$$x^2+2x+1\geq 3x-2 \ \rightarrow \text{equivalente} \rightarrow \ x^2+2x+1-7\geq 3x-2-7$$

$$x^2+2x+1\geq 3x-2 \ \rightarrow \text{equivalente} \rightarrow \ \frac{x^2+2x+1}{4}\geq\frac{3x-2}{4}$$

$$x^2+2x+1\geq 3x-2 \ \rightarrow \text{cambia de sentido la desigualdad} \rightarrow \ -(x^2+2x+1)\leq-(3x-2)$$

Inecuaciones de primer grado

¿Cómo resolver inecuaciones de primer grado (con una sola incógnita)?

1. Quitar paréntesis.
2. Quitar denominadores.
3. Agrupar los términos con incógnita a un lado de la desigualdad y los términos independientes en el otro.
4. Operar y despejar la incógnita.
5. Obtener la solución de forma gráfica o como intervalos.

Ejemplo 1 resuelto

Resolver $2x+1\leq x+3$ **.**

Operamos siguiendo los pasos enunciados anteriormente.

$2x+1\leq x+3 \;\rightarrow\; 2x-x\leq 3-1 \;\rightarrow\; x\leq 2$ → solución: $(-\infty,2]$

Ejemplo 2 resuelto

Resolver $\frac{x}{2}+\frac{x+1}{7}<x-2$.

Operamos siguiendo los pasos enunciados anteriormente.

$\frac{x}{2}+\frac{x+1}{7}<x-2 \;\rightarrow\; \frac{7x+2x+2}{14}<\frac{14x-28}{14} \;\rightarrow\; 7x+2x-14x<-28-2$

$-5x<-30$ → cambio de sentido → $5x>30 \;\rightarrow\; x>6$ → solución: $(6,+\infty)$

Sistemas de inecuaciones con una incógnita

En un sistema de inecuaciones debemos resolver cada inecuación por separado, siendo el conjunto solución del sistema la intersección de los conjuntos soluciones de ambas inecuaciones.

¿Cómo entender la intersección? Son los valores que pertenecen, a la vez, a cada una de las soluciones individuales.

Ejemplo 3 resuelto

Resolver $\left\{\begin{matrix} 3(2-5x)\geq 18-12x \\ x-2\leq 2x+10 \end{matrix}\right\}$.

Trabajamos con la primera inecuación.

$3(2-5x)\geq 18-12x \quad \rightarrow \quad 6-15x\geq 18-12x$

$-3x\geq 12$ → cambio sentido → $x\leq -4$ → solución: $(-\infty, -4]$

Trabajamos con la segunda inecuación.

$x-2\leq 2x+10 \quad \rightarrow \quad -x\leq 12$ → cambio sentido → $x\geq -12$ → solución: $[-12, \infty)$

La intersección de las soluciones particulares de cada inecuación nos da como resultado la solución del sistema → solución final: $[-12, -4]$

Inecuaciones de segundo grado

Para resolver inecuaciones con la incógnita elevada a la segunda potencia, seguiremos los siguientes pasos.

1. Igualamos el polinomio a cero y obtenemos las raíces.

2. Representamos las raíces en la recta real. Tomamos un punto de cada intervalo y evaluamos el signo que toma el polinomio en cada intervalo.

3. La solución será la unión de los intervalos donde el polinomio tome el mismo signo que la desigualdad de partida.

Ejemplo 4 resuelto
Resolver $x^2+3x-4>0$ **.**

Obtenemos la raíces del polinomio de segundo grado → $x=-4$, $x=1$.

Evaluamos el polinomio $P(x)=x^2+3x-4$ en los siguientes intervalos, y vemos donde se mantiene el signo "mayor que" de la desigualdad de partida.

$(-\infty,-4)$ → $P(-10)>0$ → cumple el signo de la desigualdad → Sí es solución

$(-4,1)$ → $P(0)<0$ → no se cumple el signo de la desigualdad

$(1,+\infty)$ → $P(2)>0$ → cumple el signo de la desigualdad → Sí es solución

Por lo tanto, la solución final es → $(-\infty,-4)\cup(1,+\infty)$

Inecuaciones racionales

En las inecuaciones donde aparecen cocientes de polinomios, seguiremos los siguientes pasos:

1. Reducimos los términos a una única fracción, y hallamos las raíces del numerador y el denominador.

2. Representamos las raíces en la recta real, sabiendo que las raíces del denominador siempre serán puntos abiertos en la recta real para evitar que el denominador sea nulo (recuerda que no está permitido dividir por 0). Las raíces del numerador serán cerradas solo si aparece el signo igual dentro de la desigualdad.

3. Tomamos un punto en cada intervalo y evaluamos el signo que toma en cada intervalo la fracción de polinomios.

4. La solución será la unión de los intervalos que tengan el mismo signo de la desigualdad de partida.

Ejemplo 5 resuelto

Resolver $\frac{x-4}{x+3}>0$.

Raíz del numerador → $x=4$ → punto abierto por la desigualdad estricta de la inecuación.

Raíz del denominador → $x=-3$ → punto abierto en la recta real por ser solución del denominador.

Evaluamos la inecuación racional $P(x)=\frac{x-4}{x+3}$ en los siguientes intervalos.

$(-\infty,-3)$ → $P(-5)=\frac{-9}{-2}>0$ → cumple el signo de la desigualdad → Sí es solución

$(-3,4)$ → $P(0)=\frac{-4}{3}<0$ → no cumple el signo de la desigualdad

$(4,\infty)$ → $P(6)=\frac{2}{9}>0$ → cumple el signo de la desigualdad → Sí es solución

Por lo tanto, la solución final es → $(-\infty,-3)\cup(4,+\infty)$

Inecuaciones de grado superior a dos

Debemos operar igual que en el caso de inecuaciones de segundo grado, obteniendo las distintas raíces.

Y si aparecen fracciones, como ya hemos visto, habrá que obtener las raíces del numerador y las raíces del denominador.

Ejemplo 6 resuelto
Resolver $x^3-x^2-6x<0$ **.**

Factorizamos el polinomio → $x^3-x^2-6x=x(x+2)(x-3)$

Evaluamos el polinomio $P(x)=x(x+2)(x-3)$ en los siguientes intervalos, y vemos donde se mantiene el signo "menor que" de la desigualdad.

$(-\infty,-2)$ → $P(-5)<0$ → cumple el signo de la desigualdad

$(-2,0)$ → $P(-1)>0$ → no se cumple el signo de la desigualdad

$(0,3)$ → $P(2)<0$ → cumple el signo de la desigualdad

$(3,+\infty)$ → $P(5)>0$ → no cumple el signo de la desigualdad

Por lo tanto, la solución final es → $(-\infty,-2)\cup(0,3)$