Problemas – Tema 1

Problemas resueltos - 3 - teorema del resto y Ruffini

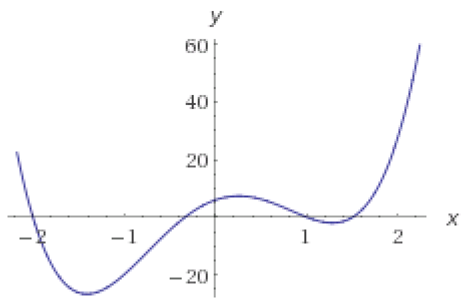
1. Factoriza el polinomio $P(x)=6x^4-x^3-22x^2+11x+6$

Vamos a factorizar por Ruffini. Los números candidatos a ser solución son los divisores del término independiente y/o los divisores del término independiente divididos entre los divisores del coeficiente del término de mayor grado del polinomio (esto último será muy útil para los casos en que existan raíces racionales).

Factorizando para los valores $x=1, x=-2, x=\frac{-1}{3}, x=\frac{3}{2}$, y sin olvidar al coeficiente que acompaña al término de mayor grado:

$$P(x)=6(x-1)(x+2)(x+\frac{1}{3})(x-\frac{3}{2})$$

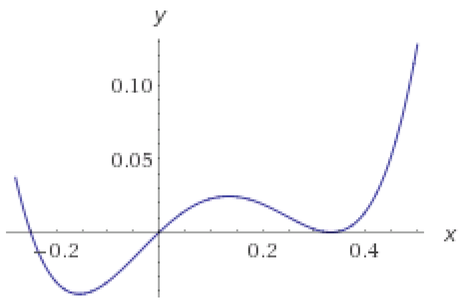
La gráfica de este polinomio de cuarto grado es la siguiente.



2. Calcula las raíces de la ecuación $12x^4-5x^3-\frac{2x^2}{3}+\frac{x}{3}=0$

Factorizando por Ruffini y representando la gráfica asociada al polinomio, encontramos soluciones para $x=0$, $x=\frac{-1}{4}$, $x=\frac{1}{3}$ (raíz doble).

$$12x\left(x-\frac{1}{3}\right)^2\left(x+\frac{1}{4}\right)=0$$



3. Calcula el m.c.m y el M.C.D. de los siguientes polinomios:

$$P(x)=x^5-x^4-5x^3+x^2+8x+4$$
$$Q(x)=x^4-5x^3-3x^2+13x+10$$

Factorizando por Ruffini:

$$P(x)=(x+1)^3(x-2)^2$$
$$Q(x)=(x+1)^2(x-2)(x-5)$$

Para el m.c.m tomamos los comunes y no comunes con mayor exponente.

$$m.c.m.=(x+1)^3(x-2)^2(x-5)$$

Para el M.C.D. tomamos los comunes con menor exponente.

$$M.C.D.=(x+1)^2(x-2)$$

4. Opera y Simplifica.

$$\left(\frac{x^3-5x^2+3x+9}{x^2-1}:\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x-3}\right)\frac{1}{x^2-9}$$

Aplicamos Ruffini en el numerador de la primera fracción.

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -5 & 3 & 9 \\
3 & & 3 & -6 & -9 \\
\hline
 & 1 & -2 & -3 & 0 \quad \rightarrow \quad (x-3) \\
3 & & 3 & 3 & \\
\hline
 & 1 & 1 & 0 & \quad \rightarrow \quad (x-3) \\
-1 & & -1 & & \\
\hline
 & 1 & 0 & & \quad \rightarrow \quad (x+1)
\end{array}$$

Desarrollamos como identidad notable el denominador de la primera fracción → $(x-1)(x+1)$ ..
Aplicamos Ruffini en el numerador de la segunda fracción.

$$\begin{array}{r|rrr}
 & 1 & 2 & 1 \\
-1 & & -1 & -1 \\
\hline
 & 1 & 1 & 0 \quad \rightarrow \quad (x+1) \\
-1 & & -1 & \\
\hline
 & 1 & 0 & \quad \rightarrow \quad (x+1)
\end{array}$$

Aplicamos Ruffini en el denominador de la segunda fracción:

$$\begin{array}{r|rrr}
 & 1 & 2 & -3 \\
-3 & & -3 & 3 \\
\hline
 & 1 & -1 & 0 \quad \rightarrow \quad (x+3) \\
1 & & 1 & \\
\hline
 & 1 & 0 & \quad \rightarrow \quad (x-1)
\end{array}$$

El numerador de la tercera fracción queda igual a 1.

Desarrollamos como identidad notable el denominador de la tercera fracción.

$$(x-3)(x+3)$$

Sustituimos los factores y simplificamos.

$$\left(\frac{(x-3)(x-3)(x+1)}{(x-1)(x+1)}:\frac{(x+1)(x+1)}{(x+3)(x-1)}\right)\frac{1}{(x-3)(x+3)}$$

$$\frac{(x-3)(x-3)(x+3)}{(x+1)(x+1)}\cdot\left(\frac{1}{(x-3)(x+3)}\right)$$

$$\frac{x-3}{(x+1)^2}$$

5. Opera y simplifica $\dfrac{(2x^2+x-1)(x-5)+13x+1}{2x^3-3x^2-8x-3}$.

Resolvemos los paréntesis del numerador → $\dfrac{2x^3-10x^2+x^2-5x-x+5+13x+1}{2x^3-3x^2-8x-3}$

Sumamos los términos → $\dfrac{2x^3-9x^2+7x+6}{2x^3-3x^2-8x-3}$

Factorizamos numerador y denominador por la regla de Ruffini.

	2	-9	7	6
3		6	-9	-6
	2	-3	-2	0

	2	-3	-2
2		4	2
	2	1	0

Numerador → $2x^3-9x^2+7x+6=(x-3)(x-2)(2x+1)$

	2	-3	-8	-3
3		6	9	3
	2	3	1	0

	2	3	1
-1		-2	-1
	2	1	0

Denominador → $2x^3-3x^2-8x-3=(x-3)(x+1)(2x+1)$

Simplificamos numerador y denominador

$$\frac{(x-3)(x-2)(2x+1)}{(x-3)(x+1)(2x+1)}=\frac{x-2}{x+1}$$

6. Opera y simplifica $\frac{2x^2-x-1}{2x^2+5x+2}\cdot\frac{4x^2+x-14}{16x^2-49}$.

$$\frac{(2x^2-x-1)\cdot(4x^2+x-14)}{(2x^2+5x+2)\cdot(16x^2-49)} \rightarrow \frac{8x^4+2x^3-28x^2-4x^3-x^2+14x-4x^2-x+14}{32x^4+80x^3+32x^2-98x^2-245x-98}$$

$$\frac{8x^4-2x^3-33x^2+13x+14}{32x^4+80x^3-66x^2-245x-98}$$

Aplicamos Ruffini al numerador y al denominador para factorizar en binomios.

$$8x^4-2x^3-33x^2+13x+14 \rightarrow 8\cdot(x+2)(x-1)\left(x-\frac{7}{4}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

$$32x^4+80x^3-66x^2-245x-98 \rightarrow 32\cdot(x+2)\left(x-\frac{7}{4}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{7}{4}\right)$$

$$\frac{8(x-1)}{32\left(x+\frac{7}{4}\right)}=\frac{x-1}{4\left(x+\frac{7}{4}\right)}=\frac{x-1}{4x+7}$$

7. Simplifica, indicando todas las operaciones: $\left(\frac{18x-9x^2}{9x^2-1}\cdot\frac{12x^2+2x-2}{4x^3-9x^2+2x}\right):\frac{4x^2+6x+2}{12x^2+x-1}$.

Factorizamos y eliminamos términos poco a poco. Ojo al sacar 9 como factor común del primer denominador.

$$\left(\frac{18x-9x^2}{9x^2-1}\cdot\frac{12x^2+2x-2}{4x^3-9x^2+2x}\right):\frac{4x^2+6x+2}{12x^2+x-1} \rightarrow \left(\frac{9x(2-x)}{9(x^2-\frac{1}{9})}\cdot\frac{2(6x^2+x-1)}{x(4x^2-9x+2)}\right):\frac{2(2x^2+3x+1)}{12x^2+x-1}$$

$$\left(\frac{(2-x)}{(x^2-\frac{1}{9})}\cdot\frac{(6x^2+x-1)}{(4x^2-9x+2)}\right):\frac{(2x^2+3x+1)}{12x^2+x-1}$$

$$\left(\frac{(2-x)}{(x+\frac{1}{3})(x-\frac{1}{3})}\cdot\frac{6(x-\frac{1}{3})(x+\frac{1}{2})}{4(x-2)(x-\frac{1}{4})}\right):\frac{(2x^2+3x+1)}{12(x-\frac{1}{4})(x+\frac{1}{3})}$$

$$\left(\frac{(2-x)}{(x+\frac{1}{3})(x-\frac{1}{3})}\cdot\frac{6(x-\frac{1}{3})(x+\frac{1}{2})}{4(x-2)}\right):\frac{(2x^2+3x+1)}{12(x+\frac{1}{3})} \rightarrow$$

$$\left(\frac{(2-x)}{(x-\frac{1}{3})}\cdot\frac{6(x-\frac{1}{3})(x+\frac{1}{2})}{4(x-2)}\right):\frac{(2x^2+3x+1)}{12}$$

$$\left(\frac{(2-x)}{1}\cdot\frac{6(x+\frac{1}{2})}{4(x-2)}\right):\frac{(2x^2+3x+1)}{12} \rightarrow \left(\frac{-1}{1}\cdot\frac{6(x+\frac{1}{2})}{4}\right):\frac{(2x^2+3x+1)}{12}$$

$$\frac{-18(x+\frac{1}{2})}{2x^2+3+1} \rightarrow \frac{-18(x+\frac{1}{2})}{2(x+1)(x+\frac{1}{2})} \rightarrow \frac{-9}{x+1}$$

8. Dada la función $g(x)=x^3+2x^2-x-2$ calcula los puntos de corte de la función con los ejes de coordenadas.

Para calcular los puntos de corte con el eje de abscisas $y=0$, igualo a cero la función y aplico Ruffini.

	1	2	-1	-2
-2		-2	0	2
	1	0	-1	0
-1		-1	1	
	1	-1	0	
1		1		
	1	0		

Es decir los puntos de corte con el eje OX son: $(-2,0),(-1,0),(1,0)$.

Para poder calcular el punto de corte con el eje de ordenadas realizo $x=0$.

$x=0 \rightarrow y=-2$ → punto $(0,-2)$

Los cuatro puntos de corte son: $(-2,0),(-1,0),(1,0),(0,-2)$