# Sistemas 3x3

| **CURSO** | **TEMA** | **WWW.DANIPARTAL.NET** |
|---|---|---|
| 1ºBach | 4. Sistemas y Gauss | Colegio Marista "La Inmaculada" de Granada |

**INFORMACIÓN GENERAL**

Resolución de sistemas de 3 ecuaciones y 3 incógnitas por el método de Gauss.

Vídeo asociado:

https://www.youtube.com/watch?v=JU3MljWpoFo

**SISTEMAS 3X3. PLANOS EN EL ESPACIO**

Una ecuación lineal con tres incógnitas representa un plano en el espacio.

Un conjunto de ecuaciones lineales de tres incógnitas forman varios planos, que se pueden cortar en un solo punto (SCD solución única), en una recta (SCI con un parámetro libre), coincidir en un mismo plano (SCI con dos parámetros libres) o no poseer puntos en común (SI sin puntos de corte).

$\boldsymbol{Sistemas\ de\ ecuaciones\ lineales\ 3\times 3.}$
$\boldsymbol{Tres\ planos\ en\ el\ espacio\ tridimensional.}$

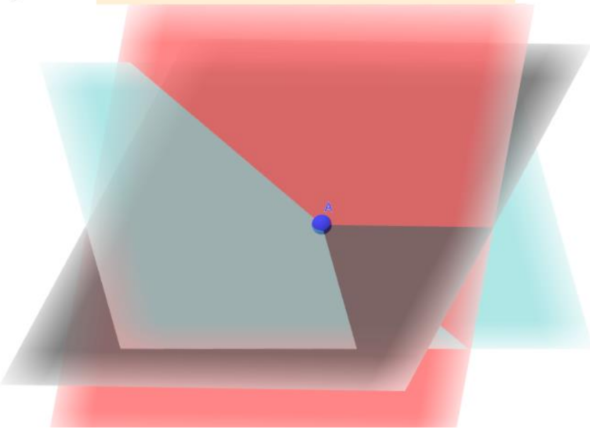
$$\left\{\begin{array}{c} x+y+2z=6 \\ x+z=3 \\ -3x-z=-5 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & |\,6 \\ 1 & 0 & 1 & |\,3 \\ -3 & 0 & -1 & |\,-5 \end{pmatrix}$$

$$C_1 \leftrightarrow C_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & |\,6 \\ 0 & 1 & 1 & |\,3 \\ 0 & -3 & -1 & |\,-5 \end{pmatrix}$$

$$F_3' = F_3 + 3F_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & |\,6 \\ 0 & 1 & 1 & |\,3 \\ 0 & 0 & 2 & |\,4 \end{pmatrix}$$

$Rango\ 3\ y\ 3\ incógnitas$
$SCD \rightarrow F_3: z=2 \rightarrow F_2: x=1 \rightarrow F_1: y=1$

$En\ sistemas\ 3\times 3\ tendremos\ SCD$
$cuando\ los\ tres\ planos\ se$
$corten\ en\ un\ único\ punto.$



Haciendo uso de la notación matricial, recuerda que en el método de Gauss podemos aplicar transformaciones lineales con las filas e incluso intercambiar la posición de las columnas de las distintas incógnitas.

¡Ojo! Si intercambias columnas, cuando vayas a resolver, no olvides cuál es la incógnita asociada a cada columna en la matriz triangular final del método de Gauss. En el ejemplo anterior, al resolver en la matriz final, de la segunda ecuación despejamos el valor de la incógnita "x" y no el valor de "y" porque hicimos un cambio entre la columna primera y segunda al inicio del método de Gauss.

La potencia del método de Gauss radica en la sencillez de las operaciones y en la facilidad para despejar el valor de las incógnitas en la matriz final del sistema.

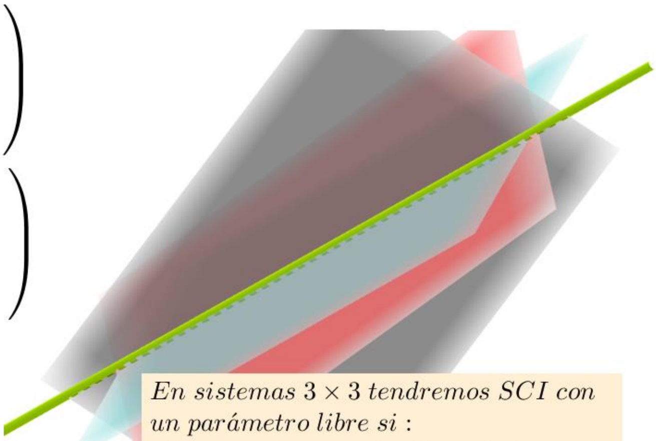
$$\left\{\begin{array}{c} x+y+2z=6 \\ x+z=3 \\ 2z+y+3z=9 \end{array}\right\} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & |\,6 \\ 1 & 0 & 1 & |\,3 \\ 2 & 1 & 3 & |\,9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} F_2' = F_2 - F_1 \\ F_3' = F_3 - 2F_1 \end{array} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & |\,6 \\ 0 & -1 & -1 & |-3 \\ 0 & -1 & -1 & |-3 \end{pmatrix}$$

$$F_2 = F_3 \to Podemos\ obviar\ F_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & |\,6 \\ 0 & -1 & -1 & |-3 \end{pmatrix}$$

*Rango 2 y 3 incógnitas* $\to$ *SCI* $: 3-2=1$ *parámetro libre*
**z=λ∈ℝ , y=3-λ, x=3-λ**



*En sistemas* $3\times 3$ *tendremos SCI con un parámetro libre si :*
*−los tres planos coinciden a lo largo de una misma recta.*
*−dos planos son coincidentes y el tercer plano los corta.*

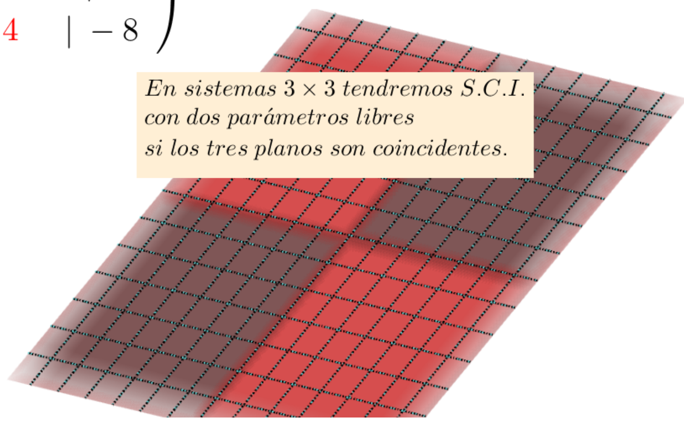
$$\left\{\begin{array}{c} 4x+2y-4z=8 \\ 2x+y-2z=4 \\ -4x-2y+4z=-8 \end{array}\right\} \to \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 & |\,8 \\ 2 & 1 & -2 & |\,4 \\ -4 & -2 & 4 & |-8 \end{pmatrix}$$

$$F_2 = \frac{1}{2}F_1 \to Obviar\ F_2$$

$$F_3 = -F_1 \to Obviar\ F_3$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 & |\,8 \end{pmatrix}$$

*Rango 1 y 3 incógnitas*
*SCI* $\to 3-1=2$ *parámetros libres*
$x=\alpha\in\mathbb{R},\ z=\beta\in\mathbb{R},\ y=4-2\alpha+2\beta$

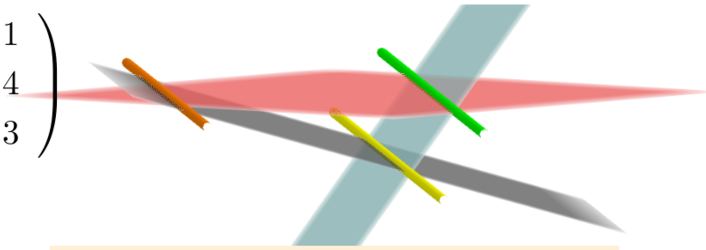


*En sistemas* $3\times 3$ *tendremos S.C.I. con dos parámetros libres si los tres planos son coincidentes.*

$$\left\{\begin{array}{c} x+y-z=1 \\ x+y+5z=4 \\ z=3 \end{array}\right\} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & |\,1 \\ 1 & 1 & 5 & |\,4 \\ 0 & 0 & 1 & |\,3 \end{pmatrix}$$

$$F_2' = F_2 - F_1 \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & |\,1 \\ 0 & 0 & 6 & |\,3 \\ 0 & 0 & 1 & |\,3 \end{pmatrix}$$

*¡Ojo, que aparece un absurdo matemático!*
$F_2 : 6z = 3 \to z = 1/2$
$F_3 : z = 3$
**Una incógnita puede tomar como solución o un solo valor o infinitos valores.**
**Pero no puede tomar dos valores diferentes.**



*Tres planos forman un S.I. al no contar con puntos comunes a los tres planos.*
*Esto puede ocurrir si :*
*−Los tres planos son paralelos.*
*−Hay dos planos paralelos y el tercero los corta.*
*−Hay dos planos coincidentes y el tercero paralelo a ellos dos.*
*−Los tres planos se cortan dos a dos en distintas rectas que a su vez no se cortan entre sí.*