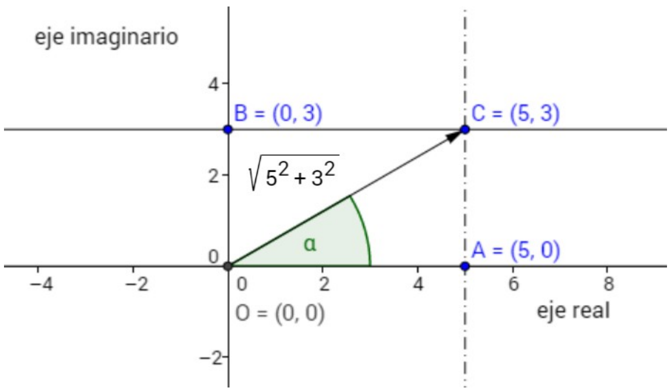
Teoría – Tema 3

Teoría - 10 - notación trigonométrica

Forma polar de un número complejo y relación con la forma binómica: notación trigonométrica

Retomemos la representación gráfica en el plano complejo, con el eje horizontal real y el eje vertical imaginario.



Por Pitágoras calculamos el módulo (longitud) del vector complejo:

$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ → en nuestro ejemplo de la gráfica $|z|=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}$

El argumento o fase (ángulo que forma el vector con el semieje positivo real) es:

$\alpha=arctg\left(\frac{b}{a}\right)$ → en nuestro ejemplo $\alpha=arctg\left(\frac{3}{5}\right)\simeq 30{,}963^{o}(primer\ cuadrante)$

Para obtener la fase del ejemplo hemos tenido en cuenta que $a>0, b>0$, que implica un punto del primer cuadrante del plano complejo.

Notación polar de un número complejo $z=a+b\cdot i$

Conocido el módulo $|z|$ y la fase α , cualquier complejo puede expresarse de la forma:

$z=|z|_{\alpha}$ → **Notación polar de un número complejo.**

El módulo suele representarse, en la forma polar, como $|z|=r$ en alusión al radio vector que representamos en el plano.

Y la fase, como ya sabemos de trigonometría, mantiene las mismas razones trigonométricas independientemente de las vueltas completas que demos al ángulo α .

Por lo tanto, podemos escribir la forma polar de la siguiente manera:

$z=r_{\alpha+360^{o}\cdot k,\, k\in\mathbb{Z}}$ → en nuestro ejemplo $z=\sqrt{34}_{30,963^{o}+360^{o}\cdot k,\, k\in\mathbb{Z}}$

En notación binómica sabemos que dos números complejos son iguales si coinciden sus partes reales e imaginarias. **En notación polar diremos que dos números complejos son iguales si sus módulos son iguales y si sus fases son iguales o se diferencian en 360º o en un múltiplo de 360º (número entero de vueltas, tanto positivas como negativas)**.

¿Podemos relacionar la notación binómica con la notación polar? Sí, a través de la llamada forma trigonométrica de un número complejo. En el triángulo *OAC* de la gráfica anterior podemos definir el coseno y el seno del ángulo α .

$$\cos\alpha=\frac{a}{r} \quad \rightarrow \quad a=r\cdot\cos\alpha$$

$$sen\,\alpha=\frac{b}{r} \quad \rightarrow \quad b=r\cdot sen\,\alpha$$

Es decir:

Forma trigonométrica de un número complejo $z=a+b\cdot i$

Conocido el módulo $|z|$ y la fase α , cualquier complejo puede expresarse de la forma:

$z=a+bi=r\cdot\cos\alpha+r\cdot sen\,\alpha\cdot i=r\cdot(\cos\alpha+sen\,\alpha\cdot i)$ → **Notación trigonométrica.**

Ejemplo 1 resuelto

Representa el afijo $z=(-8,4)$ **en su forma binómica, polar y trigonométrica.**

Forma binómica → $z=-8+4i$.

Módulo → $z=\sqrt{(-8)^2+4^2}=\sqrt{64+16}=\sqrt{80}$

Fase → $\alpha=arctg\left(\frac{4}{-8}\right)=arctg\left(\frac{-1}{2}\right)\simeq 153{,}434^{o}$ $(segundo\ cuadrante)$

Forma polar → $z=\sqrt{80}_{153{,}434^{o}+360^{o}\cdot k,\, k\in\mathbb{Z}}$

Forma trigonométrica → $z=\sqrt{80}\cdot\cos(153{,}434^{o})+\sqrt{80}\cdot sen(153{,}434^{o})\cdot i$