Problemas – Tema 1

Problemas resueltos - 9 - valor absoluto en ecuaciones e inecuaciones

1. Resuelve $|x-3|=5$

Razonamos de la siguiente manera: $x-3=\pm 5$ → resolvemos las dos ecuaciones

$x-3=5 \rightarrow x=8$

$x-3=-5 \rightarrow x=-2$

2. Resuelve $2x+|x^2-9|=15$

Dejamos solo en un miembro el polinomio contenido dentro del valor absoluto.

$|x^2-9|=15-2x$

Igualamos el argumento del valor absoluto a 0 → $x^2-9=0$ → $x=\pm 3$

Con estas raíces vemos el signo del argumento en los diferentes intervalos.

$(-\infty,-3)$ → Tomo por ejemplo $x=-10$ → $(-10)^2-9=91>0$ → Quitar barras

$(-3,3)$ → Tomo por ejemplo $x=0$ → $0^2-9=-9<0$ → Quitar barras y anteponer signo negativo

$(3,\infty)$ → Tomo por ejemplo $x=10$ → $(10)^2-9=91>0$ → Quitar barras

Con esto, la ecuación de partida se rompe en tres ecuaciones diferentes (una para cada intervalo).

$$\left\{\begin{array}{c} si\ \ x<-3 \rightarrow x^2-9=15-2x \rightarrow x^2+2x-24=0 \\ si\ -3\leq x\leq 3 \rightarrow -(x^2-9)=15-2x \rightarrow -x^2+2x-6=0 \\ si\ \ x>3 \rightarrow x^2-9=15-2x \rightarrow x^2+2x-24=0 \end{array}\right\}$$

Debemos resolver cada ecuación. **Las soluciones serán válidas siempre que pertenezcan a cada uno de los intervalos en que está definida la ecuación.**

Fíjate que las ecuaciones para $x<-3$ y para $x>3$ son idénticas.

$x^2+2x-24=0$ → soluciones → $x=-6$ para intervalo $x<-3$ y $x=4$ para $x>3$.

$-x^2+2x-6=0$ → No tiene solución → No hay solución para el intervalo $[-3,3]$.

3. Resuelve $\left|\frac{x}{x+2}\right|=x-4$

Raíz del numerador del argumento: $x=0$

Raíz del denominador del argumento: $x+2=0 \rightarrow x=-2$

Evaluamos el argumento en el interior de los siguientes intervalos:

$(-\infty,-2)$ → por ejemplo $x=-10 \rightarrow \frac{-10}{-10+2}>0$ → quitar las barras

$(-2,0)$ → por ejemplo $x=-1 \rightarrow \frac{-1}{-1+2}<0$ → quitar las barras y anteponer signo negativo

$(0,\infty)$ → por ejemplo $x=7 \rightarrow \frac{7}{7+2}>0$ → quitar las barras

Así obtenemos tres ecuaciones. Cada ecuación es válida en un intervalo concreto. Para el primer y el tercer intervalo, las ecuaciones que salen son idénticas:

$(-\infty,-2)$ y $[0,\infty)$ → $\frac{x}{x+2}=x-4 \rightarrow x=(x+2)(x-4) \rightarrow x=x^2-2x-8 \rightarrow$

$0=x^2-3x-8$ → Resolver ecuación de segundo grado → $x=4{,}70$ solución válida para el intervalo $[0,\infty)$ y $x=-1{,}70$ no pertenece a ninguno de los dos intervalos para los que está definida la ecuación.

(-2,0] → $\frac{-x}{x+2}=x-4 \rightarrow -x=(x+2)(x-4) \rightarrow -x=x^2-2x-8 \rightarrow 0=x^2-x-8 \rightarrow$

Resolver la nueva ecuación de segundo grado → $x=3{,}37$ no pertenece al intervalo de definición de la ecuación y $x=-2{,}37$ tampoco pertenece al intervalo de definición. Por lo que no hay solución en el intervalo (-2,0] .

4. Resuelve $|x+4|=1-|x-6|$

Igualamos cada argumento del valor absoluto a cero, para sacar sus raíces.

$x+4=0 \quad \rightarrow \quad x=-4$

$x-6=0 \quad \rightarrow \quad x=6$

Aparecen tres intervalos. Debemos evaluar el argumento de cada valor absoluto en cada uno de esos intervalos.

Intervalo	**signo argumento de** $|x+4|$	**signo argumento de** $|x-6|$
$(-\infty,-4) \quad \rightarrow \quad x=-10$	-	-
$(-4,6) \quad \rightarrow \quad x=0$	+	-
$(6,\infty) \quad \rightarrow \quad x=20$	+	+

Rompemos la ecuación en cada intervalo:

$$\left\{\begin{matrix} (-\infty,-4):-(x+4)=1-(-(x-6)) \\ [-4,6]:x+4=1-(-(x-6)) \\ (6,\infty):x+4=1-(x-6) \end{matrix}\right\} \rightarrow \text{operar} \rightarrow \left\{\begin{matrix} (-\infty,-4):-x-4=1+x-6 \\ [-4,6]:x+4=1+x-6 \\ (6,\infty):x+4=1-x+6 \end{matrix}\right\}$$

Resolvemos cada ecuación, y comprobamos que las soluciones pertenezcan al intervalo en que están definidas.

$$\left\{\begin{matrix} (-\infty,-4):-2x=-1 \rightarrow x=\frac{1}{2} \notin (-\infty,-4) \\ [-4,6]:0=-9 \rightarrow absurdo\, matemático \\ (6,\infty):2x=3 \rightarrow x=\frac{3}{2} \notin (6,\infty) \end{matrix}\right\} \rightarrow \text{El ejercicio no tiene solución}$$

5. Resuelve $|x+|2x+8||+x=4$

Rompemos el valor absoluto interior.

$2x+8=0 \rightarrow x=-4$

Aparecen dos intervalos.

Intervalo	**signo argumento de** $\|2x+8\|$
$(-\infty,-4) \rightarrow x=-10$	**-**
$(-4,\infty) \rightarrow x=0$	**+**

Llegamos a dos ecuaciones (una por intervalo) donde aparece un nuevo valor absoluto en cada ecuación.

$$\begin{Bmatrix} (-\infty,-4): |x-(2x+8)|+x=4 \\ [-4,\infty): |x+2x+8|+x=4 \end{Bmatrix} \rightarrow \text{operar} \rightarrow \begin{Bmatrix} (-\infty,-4): |-x-8|+x=4 \\ [-4,\infty): |3x+8|+x=4 \end{Bmatrix}$$

En cada ecuación debemos romper su correspondiente valor absoluto.

Para $(-\infty,-4) \rightarrow -x-8=0 \rightarrow x=-8$

Intervalo	**signo argumento de** $\|-x-8\|$
$(-\infty,-8) \rightarrow x=-10$	+
$(-8,-4) \rightarrow x=-6$	**-**

Resolver cada ecuación

$(-\infty,-8) \rightarrow -x-8+x=4 \rightarrow 0=12$ → absurdo matemático

$(-8,-4) \rightarrow -(-x-8)+x=4 \rightarrow 2x=-4 \rightarrow x=-2\notin(-8,-4)$ → no hay solución

Para $(-4,\infty) \rightarrow 3x+8=0 \rightarrow x=\frac{-8}{3}$

Intervalo	**signo argumento de** $\|3x+8\|$
$(-4,-\frac{8}{3}) \rightarrow x=-3$	-
$(\frac{-8}{3},\infty) \rightarrow x=0$	**+**

Resolver cada ecuación

$(-4,-\frac{8}{3}) \rightarrow -(3x+8)+x=4 \rightarrow -2x=12 \rightarrow x=-6\notin(-4,-\frac{8}{3})$ → no hay solución

$(\frac{-8}{3},\infty) \rightarrow 3x+8+x=4 \rightarrow 4x=-4 \rightarrow x=-1\in(\frac{-8}{3},\infty)$ → **sí es solución**

6. Resuelve $|5x-3|<6$.

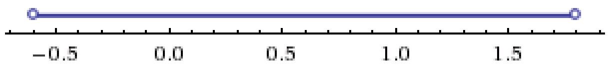
$|5x-3|<6$

$-6<5x-3<6$

$-3<5x<9$ → solución: $x\in(-3/5,9/5)$

$\frac{-3}{5}<x<\frac{9}{5}$

Imagen del intervalo solución.



7. Resuelve $|x-1| \geqslant 2$

La inecuación $|x-1| \geqslant 2$ implica dos condiciones: $x-1 \geq 2$, $x-1 \leq -2$

Si $x-1 \geq 2 \rightarrow x \geq 3$

Si $x-1 \leq -2 \rightarrow x \leq -1$

Uniendo amba condiciones, obtenemos la solución: (-∞, -1] U [3, +∞).

8. Obtener los puntos de corte de las gráficas de la función $f(x)=|x^2-1|$ y de la función $g(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$.

Para estudiar los puntos de corte entre ambas gráficas, debemos en primer lugar romper el valor absoluto en trozos. Recuerda: no operes con funciones con valor absoluto sin haberlas roto previamente en trozos.

Para ello igualamos el argumento contenido en el valor absoluto a cero, y obtenemos las raíces.

$$x^2-1=0 \;\rightarrow\; x=\pm 1$$

$$si \;\; x<-1 \;\rightarrow\; x=-10 \;\rightarrow\; (-10)^2-1>0 \;\rightarrow \text{argumento positivo}$$

$$si \;\; -1<x<1 \;\rightarrow\; x=0 \;\rightarrow\; (0)^2-1<0 \;\rightarrow \text{argumento negativo}$$

$$si \;\; x>1 \;\rightarrow\; x=10 \;\rightarrow\; (10)^2-1>0 \;\rightarrow \text{argumento positivo}$$

Donde el argumento sea negativo, deberemos colocar un signo menos al quitar el valor absoluto.

$$f(x)=\left\{\begin{matrix} x^2-1 & si \;\; x<-1 \\ 1-x^2 & si \;\; -1\le x\le 1 \\ x^2-1 & si \;\; x>1 \end{matrix}\right\}$$

Fíjate que ponemos el signo igual en uno (y solo uno) de los tramos de cada punto frontera, para garantizar la continuidad de la función.

Ahora ya podemos estudiar los punto de corte, igualando la fórmula de las gráficas en cada intervalo.

$$si \;\; x<-1 \;\rightarrow\; x^2-1=\frac{x}{2}+\frac{1}{2} \;\rightarrow\; x^2-\frac{x}{2}-\frac{3}{2}=0 \;\rightarrow \text{No hay solución dentro del intervalo}$$

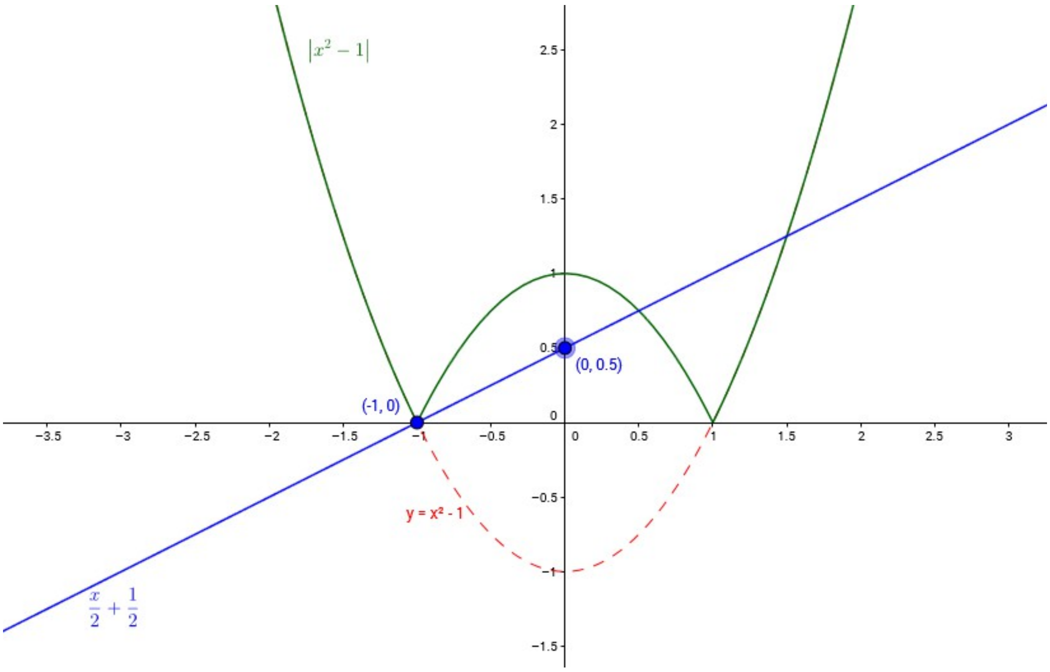
$$si \;\; -1\le x\le 1 \;\rightarrow\; 1-x^2=\frac{x}{2}+\frac{1}{2} \;\rightarrow\; x^2+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}=0 \;\rightarrow\; x=-1 \;\; , \;\; x=\frac{1}{2}$$

$$si \;\; x>1 \;\rightarrow\; x^2-1=\frac{x}{2}+\frac{1}{2} \;\rightarrow\; x^2-\frac{x}{2}-\frac{3}{2}=0 \;\rightarrow\; x=\frac{3}{2}$$

Los tres puntos de corte son $(-1,0)$, $(\frac{1}{2},\frac{3}{4})$ y $(\frac{3}{2},\frac{5}{4})$.

Si representamos la gráficas de las funciones con Geogebra, veremos claramente los tres puntos de corte.

Fíjate en la siguiente gráfica que la función $f(x)=|x^2-1|$ viene represantada con trazo verde, y que los valores de su imagen siempre son mayor o igual que cero.


|x² − 1|
(-1, 0)
(0, 0.5)
y = x² - 1
x/2 + 1/2

9. Considera las funciones $f(x)$ y $g(x)$ dadas por $f(x)=6x-x^2$ y $g(x)=|x^2-2x|$. Calcula los puntos de corte de dichas gráficas.

Rompemos la función con valor absoluto.

$x^2-2x=0 \quad \rightarrow \quad x=0, x=2$

Estudiamos el signo del argumento del valor absoluto en los siguientes intervalos.

$(-\infty, 0) \rightarrow x=-1 \rightarrow (-1)^2-2(-1)>0$ → argumento positivo

$(0,2) \rightarrow x=1 \rightarrow 1^2-2(1)<0$ → argumento negativo

$(2,\infty) \rightarrow x=3 \rightarrow 3^2-2(3)>0$ → argumento positivo

La función $g(x)=|x^2-2x|$ queda expresada en tres tramos. Donde el argumento es positivo, quitamos las barras del valor absoluto. Donde el argumento es negativo, quitamos barras y anteponemos un signo negativo.

$$g(x)=\begin{Bmatrix} x^2-2x \ si \ x<0 \\ -x^2+2x \ si \ 0\leq x\leq 2 \\ x^2-2x \ si \ 2<x \end{Bmatrix}$$

En cada tramo, igualamos las ecuaciones de las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

$(-\infty, 0) \rightarrow 6x-x^2=x^2-2x \rightarrow -2x^2+8x=0 \rightarrow x=0, x=4$ → no pertenece al intervalo

$[0,2] \rightarrow 6x-x^2=-x^2+2x \rightarrow 4x=0 \rightarrow x=0$ → sí pertenece al intervalo

$(2,\infty) \rightarrow 6x-x^2=x^2-2x \rightarrow -2x^2+8x=0 \rightarrow x=0, x=4 \rightarrow x=4$ sí pertenece

Los dos puntos de corte son $(0,0)$ y $(4,8)$.