Problemas – Tema 5

Problemas resueltos - 12 - cambio de variable par en el producto seno por coseno

1. Resuelve $\int \frac{1}{1+tg(x)}dx$

La integral es par en el producto seno por coseno, por lo que proponemos el cambio de variable:

$tg(x)=t$ $\rightarrow$ diferenciamos $(1+tg^2(x))dx=dt$ $\rightarrow$ $dx=\frac{dt}{1+tg^2(x)}$ $\rightarrow$ $dx=\frac{dt}{1+t^2}$

Llevamos estos resultados a la integral.

$$\int \frac{1}{1+tg(x)}dx=\int \frac{1}{1+t}\cdot\frac{dt}{1+t^2}=\int \frac{1}{(1+t)(1+t^2)}dt$$

Tenemos un cociente de polinomios, con grado del numerador inferior al grado del denominador.
Sacamos las raíces del denominador.

$$(1+t)(1+t^2)=0 \rightarrow t=-1$$

Una raíz simple y una ecuación de segundo grado con solución compleja.
Aplicamos el método de coeficientes indeterminados.

$\frac{1}{(1+t)(1+t^2)}=\frac{A}{1+t}+\frac{B\cdot t+C}{1+t^2}$ $\rightarrow$ Aplicamos m.c.m. e igualamos numeradores

$$1=A(1+t^2)+(B\cdot t+C)(1+t)$$

Si $t=-1 \rightarrow 1=A(2)+(-B+C)0 \rightarrow A=\frac{1}{2}$

Si $t=0 \rightarrow 1=A(1)+(B\cdot 0+C)(1) \rightarrow 1=\frac{1}{2}+C \rightarrow C=\frac{1}{2}$

Si $t=1 \rightarrow 1=A(2)+(B+C)(2) \rightarrow 1=1+2B+1 \rightarrow B=\frac{-1}{2}$

Sustituimos en la integral.

$$I=\int \frac{1}{(1+t)(1+t^2)}dt=A\int \frac{1}{1+t}dt+\int \frac{B\cdot t+C}{1+t^2}dt=\frac{1}{2}\ln|1+t|-\frac{1}{2}\int \frac{t}{1+t^2}dt+\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t^2}dt$$

$$I=\frac{1}{2}\ln|1+t|-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{2\cdot t}{1+t^2}dt+\frac{1}{2}arcotg(t)=\frac{1}{2}\ln|1+t|-\frac{1}{4}\cdot\ln|1+t^2|+\frac{1}{2}arcotg(t)+C$$

Deshacemos el cambio de variable.

$$I=\frac{1}{2}\ln|1+tg(x)|-\frac{1}{4}\cdot\ln|1+tg^2(x)|+\frac{1}{2}arcotg(tg(x))+C$$

$$I=\frac{1}{2}\ln|1+tg(x)|-\frac{1}{4}\cdot\ln|1+tg^2(x)|+\frac{1}{2}\cdot x+C$$

2. Resuelve $\int \frac{1}{\cos^4(x)} dx$

Estamos ante una integral par en el producto seno por coseno → cambio de variable: $tg(x)=t$

$$tg(x)=t \quad \rightarrow \quad dx=\frac{dt}{1+t^2}$$

Como vimos en teoría podemos deducir la expresión del coseno a partir de un ángulo de un triángulo rectángulo con cateto opuesto igual a t y cateto contiguo igual a 1 .

$$\cos(x)=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

Sustituimos en la integral de partida.

$$I=\int \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^4} \cdot \frac{dt}{1+t^2}=\int \frac{(1+t^2)^2}{1+t^2} dt=\int (1+t^2) dt=t+\frac{t^3}{3}+C$$

Deshacemos el cambio: $I=tg(x)+\frac{tg^3(x)}{3}+C$

3. Resuelve $\int \frac{1}{\cos^2(x)\cdot sen^2(x)}dx$

Par en el producto seno · coseno → cambio de variable $tg(x)=t \rightarrow dx=\frac{dt}{1+t^2}$

Como vimos en teoría podemos deducir la expresión del seno y del coseno a partir de un ángulo de un triángulo rectángulo con cateto opuesto igual a t y cateto contiguo igual a 1 .

$$\cos(x)=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \quad , \quad sen(x)=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

Sustituimos en la integral de partida.

$$I=\int \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2\cdot\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2}\cdot\frac{dt}{1+t^2}=\int\frac{(1+t^2)\cdot(1+t^2)}{t^2}\cdot\frac{dt}{1+t^2}=\int\frac{1+t^2}{t^2}dt$$

$$I=\int\frac{1}{t^2}dt+\int dt=\frac{-1}{t}+t+C$$

Deshacemos el cambio: $I=\frac{-1}{tg(x)}+tg(x)+C$