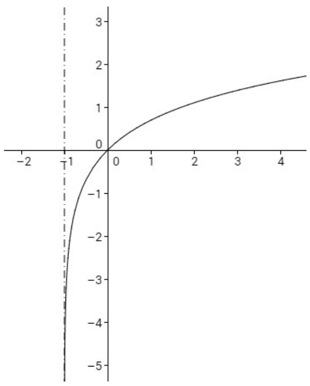
Problemas – Tema 8

Problemas resueltos - 11 - estudio cualitativo de gráficas de funciones

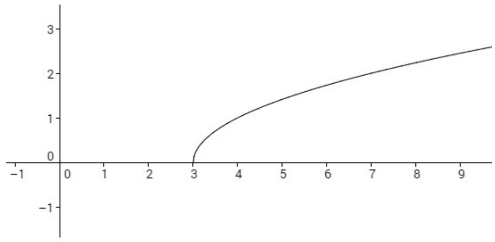
1. Relaciona de manera justificada las siguientes funciones con sus respectivas gráficas. Debes razonar con el máximo detalle posible.

$f(x)=\ln(x+1)$, $g(x)=\dfrac{x}{x-1}$, $h(x)=\sqrt{x-3}$

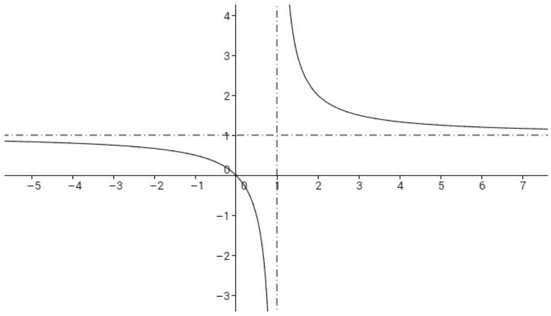
a)



b)



c)



$f(x)=\ln(x+1)$ se corresponde con la gráfica ***a)*** ya que la función está definida siempre que el argumento del logaritmo sea positivo, por lo que presenta una asíntota vertical para valores a la derecha de $x=-1$.

Además, la función logaritmo es una función estrictamente creciente y se dispara a infinito cuando la variable $x\to\infty$.

Por último si $x=0$ → $f(0)=\ln(0+1)=0$ → La función corta a los ejes cartesianos en el origen de coordenadas $(0,0)$.

$g(x)=\frac{x}{x-1}$ se corresponde con la gráfica ***c)***, ya que posee una asíntota vertical en $x=1$ (donde no está definida la función, por anularse el denominador) y una asíntota horizontal en $y=1$ que se corresponde con el límite $\lim_{x\to\infty} f(x)=1$.

Además, la gráfica corta a los ejes cartesianos en el origen de coordenadas $(0,0)$, que se corresponde con el valor $g(0)=0$.

$h(x)=\sqrt{x-3}$ se corresponde con la gráfica ***b)***, ya que la función no está definida para discriminantes negativos, por lo que su dominio es $x\geq 3$.

Además, la función raíz cuadrada es estrictamente creciente y se dispara a infinito cuando $x\to\infty$.

2. Una barra de hierro dulce de 30 cm de larga a 0ºC se calienta y su dilatación viene dada por una función lineal $L=a+bt$, donde L es la longitud en cm y t es la temperatura ºC.

a) Halla la expresión analítica de L , sabiendo que $L(1)=30{,}0005\,cm$ y que $L(3)=30{,}0015\,cm$.

b) Representa gráficamente la función obtenida.

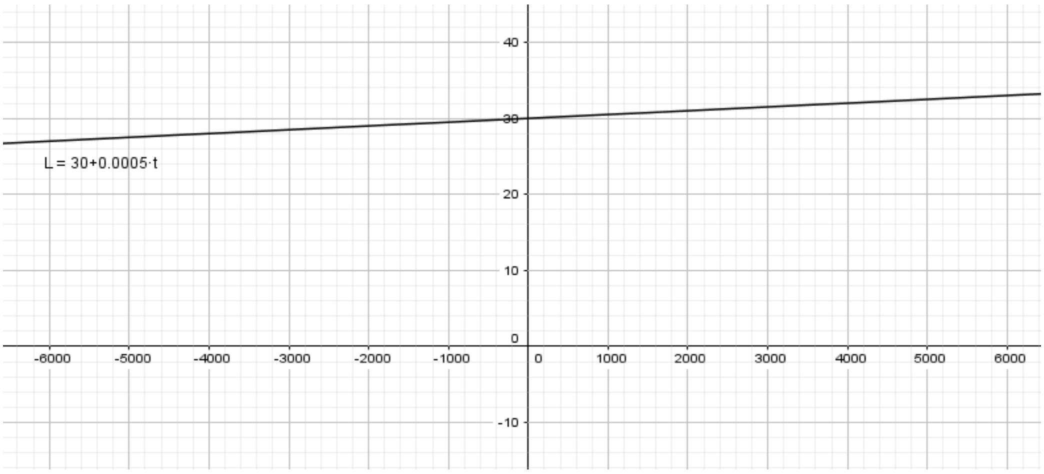
a) El crecimiento de la barra depende linealmente de la temperatura → $L=a+bt$ → Si representamos en el eje horizontal la variable tiempo y en el eje vertical la variable longitud, tendremos una recta. Y una recta queda definida si conocemos dos puntos.

$$L(1)=30{,}0005\,cm \quad\rightarrow\quad 30{,}0005=a+b\cdot 1$$
$$L(3)=30{,}0015\,cm \quad\rightarrow\quad 30{,}0015=a+b\cdot 3$$

Si restamos ambas ecuaciones → $-0{,}001=-2b$ → $b=0{,}0005$ → $a=30$

La expresión analítica queda → $L=30+0{,}0005\cdot t$

b) Pintamos la gráfica con Geogebra, ajustando adecuadamente la división de los ejes para apreciar el crecimiento de la longitud en función de la temperatura.



3. Por el alquiler de un coche cobran 100 € diarios más 0.30 € por kilómetro. Encuentra la ecuación de la recta que relaciona el coste diario con el número de kilómetros y represéntala. Si en un día se ha hecho un total de 300 km, ¿qué importe debemos abonar?

En la recta a representar tenemos:

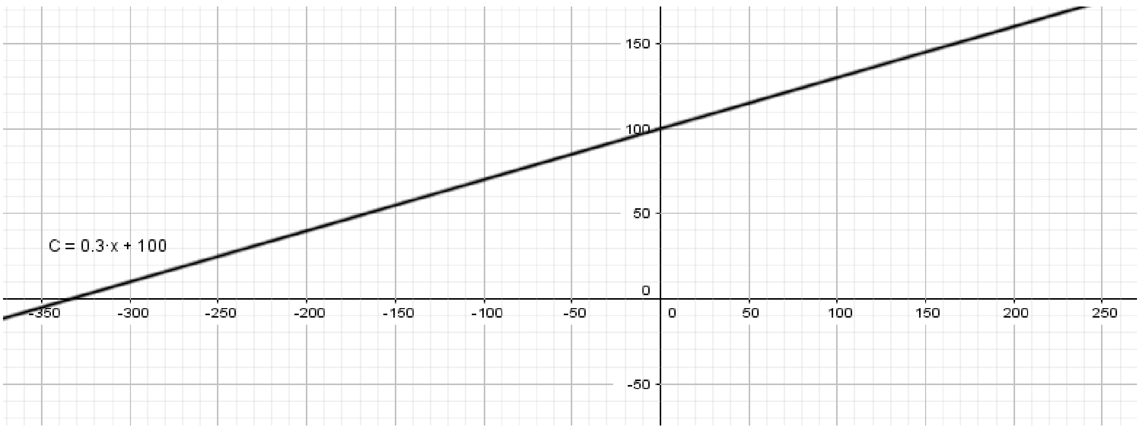
Variable independiente → número de kilómetros → x

Variable dependiente → coste → $C(x)$

Valor mínimo de un día → $100\,€$

Ecuación de la recta → $C(x)=0{,}3\cdot x+100$

Si recorremos en un día un total de 300 kilómetros → $C(300)=0{,}3\cdot 300+100=190\,€$



4. Representa gráficamente $f(x)=1-\frac{x^2}{4}$ **tomando como referencia la gráfica de** $g(x)=x^2$ **.**

Mostramos en un mismo sistema de coordenadas las funciones:

$g(x)=x^2$ → parábola convexa, con vértice en $(0,0)$

$h(x)=-x^2$ → reflejamos la parábola $g(x)$ respecto al eje horizontal

$i(x)=\frac{-x^2}{4}$ → abrimos las ramas de las parábolas $h(x)$ al multiplicar por un número inferior a 1

$f(x)=1-\frac{x^2}{4}$ → subimos verticalmente una unidad la gráfica de $i(x)$