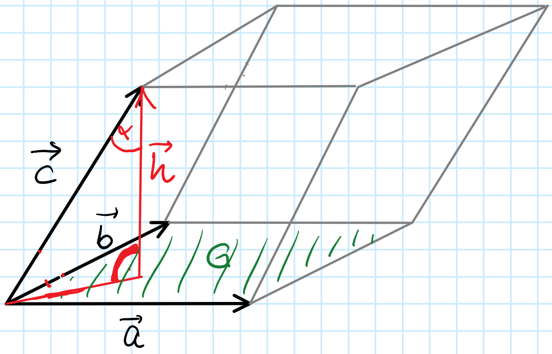
Montag, 8. Februar 2021 19:10

Das Volumen des Spats



Drei Vektoren $\vec a, \vec b$ und $\vec c$ spannen ein Spat auf.

Größe der Grundfläche: $|\vec a \times \vec b|$

Höhe des Spats: $\cos\alpha = \frac{|\vec h|}{|\vec c|} \Rightarrow |\vec h| = \cos\alpha \cdot |\vec c|$

Volumen des Spats:

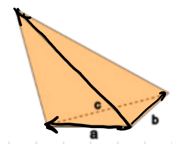
$$- G \cdot |\vec h| = |\vec a \times \vec b| \cdot |\vec h| = \underbrace{|\vec a \times \vec b| \cdot \cos\alpha \cdot |\vec c|}_{\text{Skalarprodukt Definition}} = |(\vec a \times \vec b) \circ \vec c|$$

Spatvolumen

Die Maßzahl des Volumens des von den Vektoren $\vec a, \vec b$ und $\vec c$ aufgespannten Spats beträgt $V = |(\vec a \times \vec b) \circ \vec c|$

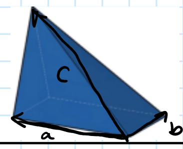
Pyramidenvolumen (dreiseitig)

$V = \frac{1}{6} |(\vec a \times \vec b) \circ \vec c|$



Pyramidenvolumen (vierseitig)

$V = \frac{1}{3} |(\vec a \times \vec b) \circ \vec c|$



Beispiel: Berechne das Volumen des Spats ABCDEFGH mit den Eckpunkten A(0|0|0), B(3|0|0), D(3|4|0), E(3|5|6).

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{AD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{AE} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$V = \left| \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = 12 \cdot 6 = 72 \text{ VE}$$