# A3 Les fonctions polynômes de degré 2

## I/ Rappel sur les paraboles et sur les fonctions de degré 2 :

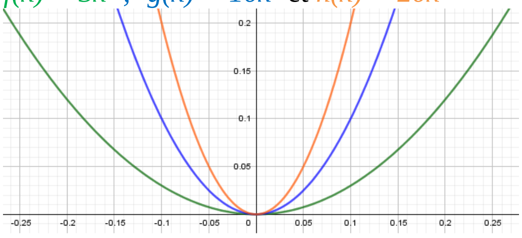
En seconde nous avons vu que les fonctions de degré 2 sont représentées par des paraboles. Ces fonction ont pour particularité d'admettre un axe de symétrie vertical passant par $x_0 = \frac{-b}{2a}$. Elles sont soit croissantes puis décroissante quand a < 0 et admettent un maximum en $x_0$. Soit quand a > 0 elles sont décroissantes puis croissantes et admettent un minimum en $x_0$.

## II/ Les fonctions du type $ax^2$.

### 1) Graphique :

**Si *a* > *0*** la courbe prend une forme de « sourire ». Ici nous avons trois fonctions.

$f(x) = 3x^2$ ; $g(x) = 10x^2$ et $h(x) = 20x^2$

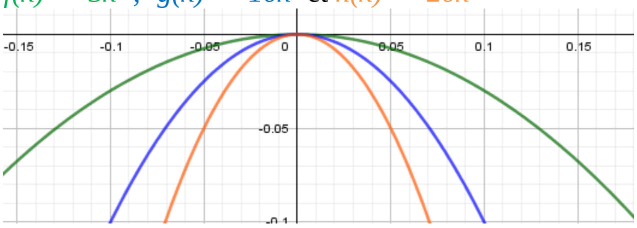



Plus *a* est grand plus la courbe est resserrée autour de l'axe des ordonnées.

Cette fonction s'annule pour $x = 0$

**Si *a* < *0*** la courbe prend la forme « triste ». Ici nous avons trois fonctions.

$f(x) = -3x^2$ ; $g(x) = -10x^2$ et $h(x) = -20x^2$




Plus *a* est petit plus la courbe est resserrée autour de l'axe des ordonnées.

Cette fonction s'annule pour $x = 0$.

### 2) Signe :

***Rappel sur le signe d'une fonction :***

Obtenir le signe d'une fonction c'est connaître le signe du résultat du « calcul » de la fonction selon les valeurs de *x* que l'on choisit. Par exemple, pour la fonction $f(x) = 2x + 4$ définie sur [-3 ; 4], le tableau de signe est le suivant.

| $x$ | $-3$ | | $-2$ | | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

Ce qui signifie que pour toute valeur de *x* comprise entre *-3* et *-2* le résultat du calcul de *f(x)* sera négatif, graphiquement cela se traduirait par une courbe se situant en dessous de l'axe des abscisses. Par exemple $f(-3) = -2$ qui est bien un nombre négatif. Et pour tout nombre *x* compris entre *-2* et *4*, *f(x)* sera positif, graphiquement cela se traduirait par une courbe située au dessous de l'axe des abscisses. Par exemple $f(2) = 8$ qui est bien un nombre positif. Enfin on remarque dans le tableau que si $x = -2$ alors $f(x) = 0$.

Il y a donc d'après le graphique ci-dessus un seul tableau de signe possible **si *a* > *0* :**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |

Il y a donc d'après le graphique ci-dessus un seul tableau de signe possible **si *a* < *0* :**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $-$ | $0$ | $-$ | |

### 3) Extremum de la fonction :

Si $a > 0$ le minimum de la fonction est atteint pour $x = 0$ et $f(0) = 0$

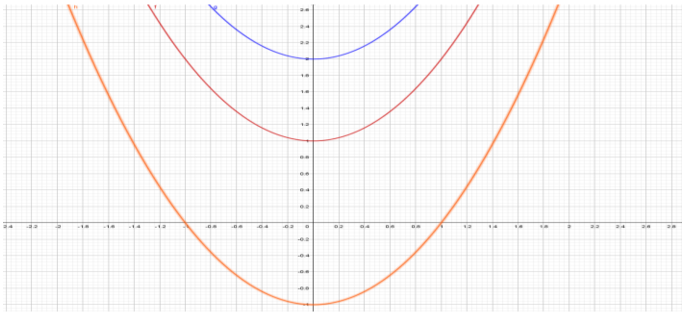
Si $a < 0$ le maximum de la fonction est atteint pour $x = 0$ et $f(0) = 0$

# III/ Les fonctions du type $ax^2 + c$.

## 1) Graphique.

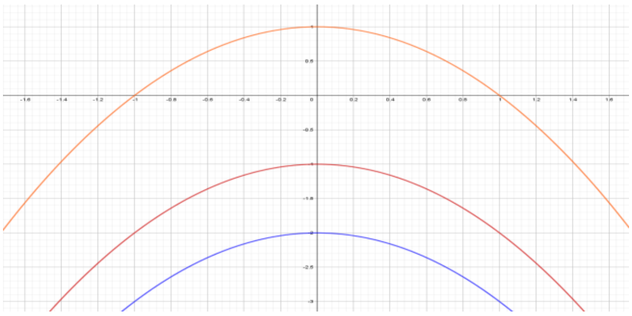
Ajouter un nombre c a la fonction ax² à pour effet de faire remonter ou déscendre la courbe représentative de la fonction ce qui donne les représentations graphique suivantes

**Si $a > 0$ :**



$f(x) = x^2 + 2$, $g(x) = x^2 + 1$ et $h(x) = x^2 - 1$

**Si $a < 0$ :**



$f(x) = - x^2 - 2$, $g(x) = - x^2 - 1$ et $h(x) = -x^2 + 1$

## 2) Notion de racines.

Les racines d'un polynôme sont les valeurs de $x$ pour lesquelles $f(x) = 0$ autrement dit ce sont les points d'intersection entre la courbe représentative de la fonction et l'axe des abscisses. Dans le cas des fonctions du type $ax^2 + c$, le polynôme admet des racines si et seulement si $a$ et $c$ sont de signe opposés. On peut alors résoudre l'équation $f(x) = 0$ pour trouver les racines.

***De manière littérale :***

$ax^2 + c = 0$

$ax^2 = - c$

$x^2 = \frac{-c}{a}$

$x = -\sqrt{\frac{-c}{a}}\ ou\ +\sqrt{\frac{-c}{a}}$

***Avec un exemple :***

$9x^2 - 81 = 0$

$9x^2 = 81$

$x^2 = 9$

$x = -3$ ou $3$

Les racines d'un polynôme de degré 2 sont souvent notées $x_1$ et $x_2$ avec $x_1 < x_2$.

## 3) Signe.

Il y a donc pour chaque signe de a deux tableaux de signes possibles.

**Si $a > 0$ et $c > 0$**, le polynôme n'admet pas de racines et donc le tableau de signe est :

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $+$ | |

**Si $a < 0$ et $c < 0$**, le polynôme n'admet pas de racines et donc le tableau de signe est :

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $-$ | |

**Si $a > 0$ et $c < 0$**, le polynôme admet deux racines $x_1$ et $x_2$ de signe opposé. Le tableau de signe est donc le suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $x1$ | | $x2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

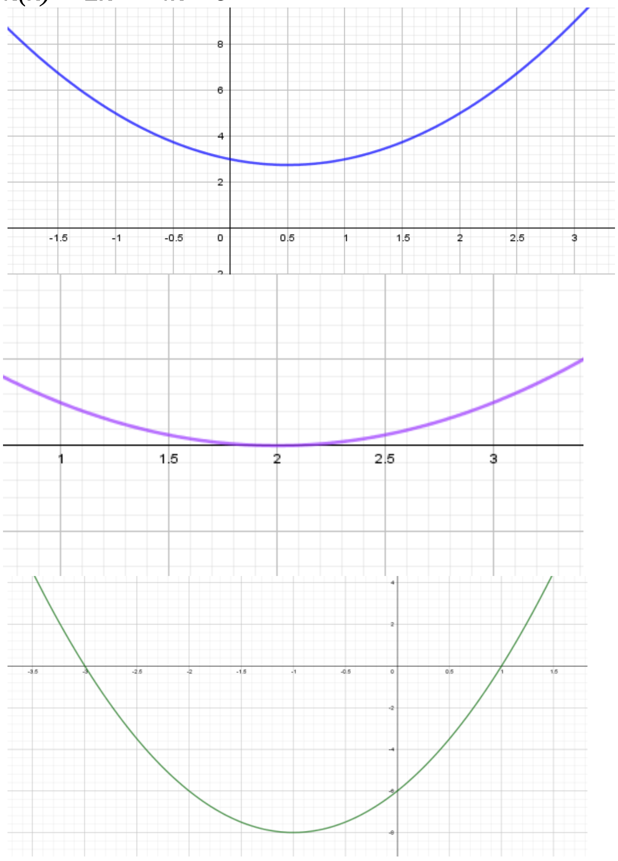
**Si $a < 0$ et $c > 0$**, le polynôme admet deux racines $x_1$ et $x_2$ de signe opposé. Le tableau de signe est donc le suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $x1$ | | $x2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

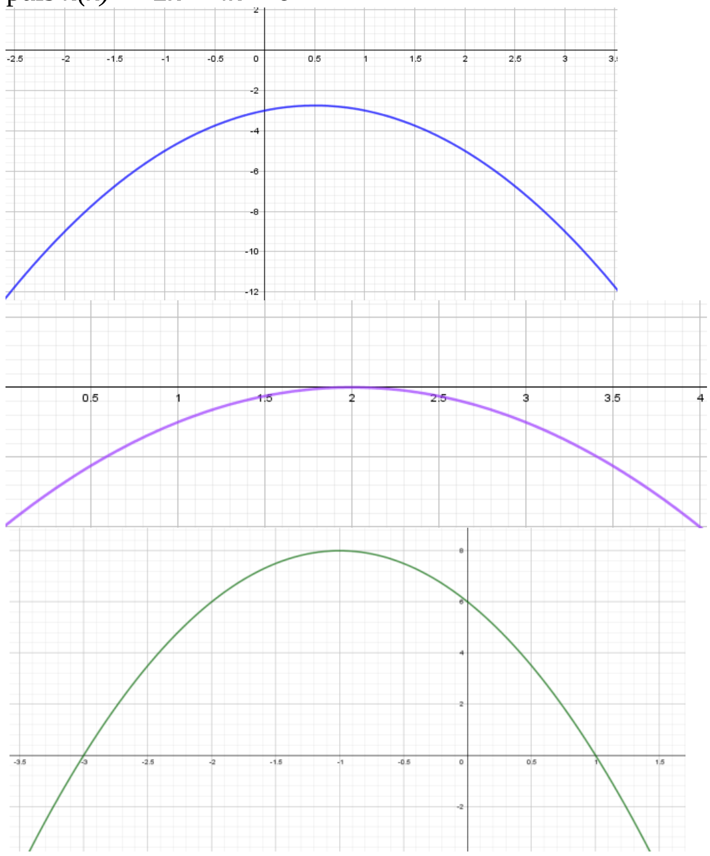
# IV/ Les fonctions du type $ax^2 + bx + c$.

## 1) Graphique.

Ici nous avons tracé $f(x) = x^2 - x + 3$, $g(x) = x^2 - 4x + 4$
$h(x) = 2x^2 + 4x - 6$



Ici nous avons tracé $f(x) = -x^2 + x - 3$, $g(x) = -x^2 + 4x - 4$
puis $h(x) = -2x^2 - 4x + 6$



On remarque que dans les deux cas, *f* n'admet aucune racine, pour g les deux racines $x_1$ et $x_2$ sont égales et que pour h il y a bien deux racines.

## 2) Racines et factorisation.

On admettra que si un polynôme admet deux racines $x_1$ et $x_2$ alors il peut s'écrire sous la forme :
$a(x - x_1)(x - x_2)$

***Exemples :***

Pour $h(x) = 2x^2 + 4x - 6$
Graphiquement on peut lire que les racines sont $-3$ et $1$. De plus, on sait que $a = 2$ (c'est le nombre qui multiplie $x^2$). Donc on peut en déduire que $h(x) = 2(x - (-3))(x - 1)$.

Pour $h(x) = -2x^2 - 4x + 6$
Graphiquement on peut lire que les racines sont $-3$ et $1$. De plus, on sait que $a = -2$ (c'est le nombre qui multiplie $x^2$). Donc on peut en déduire que $h(x) = -2(x - (-3))(x - 1)$.

## 3) Signe.

Il y a donc trois tableaux de signe possible quand $a > 0$ et trois autres quand $a < 0$.

Si $a > 0$

Pas de racines :

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| signe de f(x) | | + | |

Avec $x_1 = x_2$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{-b}{2a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| signe de f(x) | | + | 0 | + | |

Avec deux racines différentes :

| $x$ | $-\infty$ | | x1 | | x2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| signe de f(x) | | + | 0 | − | 0 | + | |

Si $a < 0$

Pas de racines :

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| signe de f(x) | | − | |

Avec $x_1 = x_2$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{-b}{2a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| signe de f(x) | | − | 0 | − | |

Avec deux racines différentes :

| $x$ | $-\infty$ | | x1 | | x2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| signe de f(x) | | − | 0 | + | 0 | − | |

# V/ Méthodes.

## 1) Associer une courbe à une expression.

Pour associer une courbe à une expression il faut observer les différents éléments de l'expression. Il y a deux possibilités :

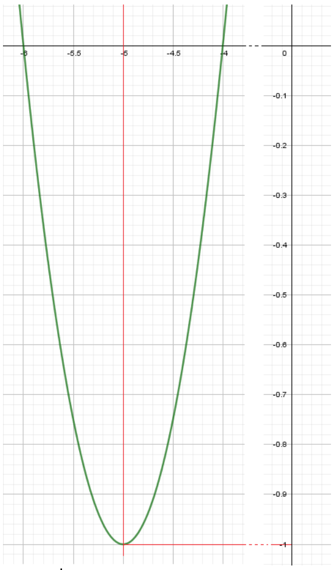
- Soit l'expression est développée :

$f(x) = ax^2 + bx + c$

- Dans ce cas il faut regarder la forme de la courbe $a > 0$, forme de « sourire ». $a < 0$, forme « triste ».
- Calculer l'abscisse de l'axe de symétrie en calculant $-b/2a$.
- Si besoin calculer $f(-b/2a)$ pour identifier la bonne courbe.

***Exemple :***

Vérifier si la courbe ci-dessous est bien la courbe représentative de la fonction $f(x) = x^2 +10x + 24$



- $a = 1$ donc la forme de la courbe est bien une forme de sourire comme sur le graphique ci-contre.
- Calcul de –b/2a :

$$\frac{-10}{2 \times 1} = -5$$

On vérifie que l'axe de symétrie de la courbe passe bien par x = -5 ce qui est ici le cas.

- Calcul de f(-b/2a)

f(-5) = (-5)² + 10 × (-5) + 24 = 25 – 50 + 24 = -1

Ici sur le graphique f(-5) est bien égale à -1 donc la courbe ci-contre est bien la représentation graphique de la fonction $f(x) = x^2 +10x + 24$.

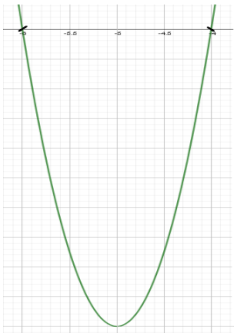
- Soit l'expression est factorisée :

$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

- Dans ce cas il faut regarder la forme de la courbe $a > 0$, forme de « sourire ». $a < 0$, forme « triste ».
- Lire l'abscisse des racines du polynôme sur le graphique et les comparer aux x1 et x2 de la forme factorisée.

***Exemple :***

Vérifier si la courbe ci-dessous est bien la courbe représentative de la fonction $f(x) = (x + 6)( x + 4)$.



- a > 0 donc la forme de la courbe est bien une forme de sourire comme sur le graphique ci-contre.
- Les abscisses des points d'intersection entre la courbe et l'axe des abscisses sont -6 et 4. Dans l'expression de la fonction on a $-x_1 = 6$ donc $x_1 = -6$ et $-x_2 = 4$ donc $x_2 = -4$. Ce qui correspond bien à ce qui est lu sur le graphique.

Donc la courbe ci-contre est bien la représentation graphique de la fonction $f(x) = (x + 6)( x + 4)$.

## 2) Déterminer le signe d'un polynôme de degré 2.

Pour déterminer le signe d'une fonction polynôme de degré 2 il faut connaître deux informations :

- Le signe de a
- Les valeurs de racines du polynôme (lorsqu'elles existent)

Une fois ces deux informations connues, se reporter au IV/ 3) pour connaître le tableau à dresser.

## 3) Vérifier qu'un nombre est bien une racine d'un polynôme.

Pour vérifier qu'un nombre est bien racine d'un polynôme il suffit d'en calculer l'image et si le résultat obtenu est 0, alors le nombre est bien racine du polynôme.

***Exemple :***

Parmi les nombres -6 et 3, vérifie lequel est racine du polynôme $P = x^2 + 10x + 24$.

$f(-6) = (-6)^2 + 10\times (-6) + 24 = 0$ Donc -6 est racine de $P$.

$f(3) = 3^2 + 10 \times 3 + 24 = 63 \neq 0$ Donc 3 n'est pas racine de $P$.

## 4) Factoriser une expression en connaissant une racine.

On sait que pour tout polynôme du type $P = ax^2 + bx + c$ on peut aussi écrire que $P = a(x - x1)(x - x2)$ avec $x_1$ et $x_2$ les racines du polynôme.

Partant de cette connaissance on peut déterminer une des racines en connaissant l'autre en factorisant P.

***Exemple :***

$P = 2x^2 + 4x - 6$ et on admet que $x_2 = 1$. Factoriser $P$ puis trouver $x_1$.
Puisque $x_2 = 1$ et a = 2 (c'est le nombre qui multiplie $x^2$). On sait que :
$P = 2(x - x_1)(x - 1)$ On a remplacé $a$ et $x_2$ par leurs valeurs dans la formule de départ

$P = 2(x^2 - x - xx_1 + x_1)$ On développe
$P = 2x^2 - 2x - 2xx_1 + 2x_1$ On termine le développement
$P = 2x^2 + x\times 2(-1 - x_1) + 2x_1$ On a factorisé par $x$ une partie de l'expression pour pouvoir la ranger par puissance de $x$.
Or on sait que $P = 2x^2 + 4x - 6$
Donc on identifie que
$4 = 2(-1 - x_1)$ *ligne 1*
$-6 = 2x_1$ *ligne 2*
D'où $x_1 = \frac{-6}{2} = -3$
On vérifie à l'aide de la ligne 1 que le résultat obtenu est correct.
$2(-1 - (-3)) = 2(-1 + 3) = 4$ Donc le résultat est correct.
Donc on peut en déduire que $x_1 = -3$, Donc :
$P = 2(x - (-3))(x - 1)$
$P = 2(x + 3)(x - 1)$

On peut faire cette identification car puisque les deux expressions de $P$ sont égales, cela signifie que ce qui multiplie $x^2$ dans les deux expressions de $P$ sont identiques. De même pour ce qui multiplie $x$, et ce qui ne multiplie pas $x$.

## 5) Trouver l'axe de symétrie d'une fonction de degré 2 et les coordonnées de l'extremum.

A partir de l'expression factorisée d'un polynôme on peut déterminer la position de l'axe de symétrie de la parabole et donc les coordonnées de l'extremum. Nous avons vu en seconde que l'axe de symétrie se trouve grâce à la formule :

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = x_0$$

Ensuite pour calculer la valeur de l'extremum il suffira de calculer l'image de $x_0$.

***Exemples :***

$P = 2(x - 1)(x + 3)$
On sait donc que les racines de ce polynômes sont 1 et -3.
Donc :

$$x_0 = \frac{1 + (-3)}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Donc l'équation de l'axe de symétrie de $P$ est $x = -1$.
On sait aussi que $a > 0$ car $a = 2$ Donc $P$ admet un minimum.
Calculons le minimum de P :
$P = 2(-1 - 1)(-1 + 3) = -8$
Donc les coordonnées du minimum de P sont (-1 ; -8)

$R = -3(x - 2)(x - 4)$
On sait donc que les racines de ce polynôme sont 2 et 4.
Donc :

$$x_0 = \frac{2 + 4}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Donc l'équation de l'axe de symétrie de $P$ est $x = 3$.
On sait aussi que $a < 0$ car $a = -3$ Donc $P$ admet un maximum.
Calculons le maximum de $P$ :
$P = -3(3 - 2)(3 - 4) = 3$
Donc les coordonnées du maximum de $P$ sont (3 ; 3)

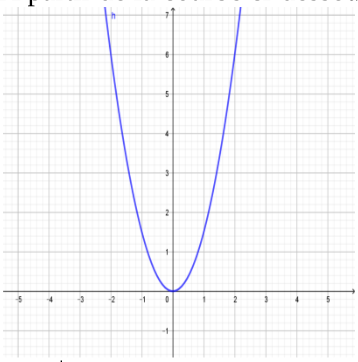
## 6) Trouver l'équation d'une fonction à partir de sa courbe :

- Lorsque la courbe est centrée sur l'axe des ordonnées :

Dans ce cas on sait que l'équation de la courbe est de la forme $ax^2 + c$.
Trouver $c$ : Il suffit de chercher $f(0)$ car $f(0) = a\times 0^2 + c = c$.
Trouver $a$ : Il faut lire les coordonnées d'un point $B(x_B ; y_B)$ sur la courbe, pour ensuite trouver la valeur de a par le calcul en résolvant $f(x_B) = y_B$. La solution la plus simple lorsque c'est possible est de choisir $x_B = 1$ car $f(1) = a\times 1^2 + c = a + c$.

***Exemple :***

A partir de la courbe ci-dessous trouver l'expression de la fonction :



On remarque que la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées donc son expression est de la forme ax² + c.
Déterminer $c$ :
Sur le graphique on remarque que $f(0) = 0$. Donc $c = 0$
Déterminer $a$ :
On peut lire que $f(2) = 6$ donc :
$a\times 2^2 = 6$
$a = 6/4 = 1,5$
Donc l'expression de la fonction est $f(x) = 1,5x^2$

- Lorsque la courbe n'est pas centrée sur l'axe des ordonnées, il faut lire les valeurs des racines et donner la forme factorisée.