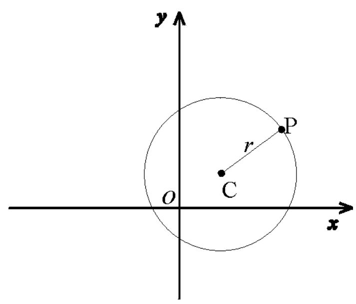
Le coniche: circonferenza, parabola, ellisse e iperbole.

Teoria in sintesi

Queste curve si chiamano ***coniche*** perché sono ottenute tramite l'intersezione di una superficie conica con un piano.
Si possono definire tutte come luoghi geometrici e, di conseguenza, ricavarne l'equazione algebrica che le rappresenta nel piano cartesiano.

LA CIRCONFERENZA

La *circonferenza* è il luogo geometrico dei punti equidistanti da un punto *C*, detto *centro*.
Si ottiene tagliando un cono con un piano perpendicolare al suo asse.
La distanza fra ognuno dei suoi punti e il centro è il *raggio* della circonferenza.



Note le *coordinate del centro* ***C (α;β)*** e la *misura r del raggio*, *l'<u>equazione della circonferenza</u>* è allora

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \qquad \text{(equazione canonica)}$$

Ricaviamola.
Tutti i punti *P* che stanno sulla circonferenza hanno la proprietà comune che

$$\overline{PC}=r, \text{ cioè } \overline{PC}^2=r^2$$

Utilizzando la formula della distanza tra due punti si ottiene allora

$$\overline{PC}=\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}$$

Elevando al quadrato e sostituendo al posto di $\overline{PC}^2$ la sua misura si ottiene allora l'equazione cercata.

Esempio

$(x-2)^2+(y+1)^2=9$ è l'equazione della circonferenza con centro C(2; -1) e raggio 3.

L'equazione può anche essere scritta nella forma

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0, \quad \text{(equazione generale)}$$

dove *a, b* e *c* sono legati alle coordinate del centro $C(\alpha; \beta)$ ed al raggio dalle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \alpha = -\dfrac{a}{2}, \\ \beta = -\dfrac{b}{2}, \\ r = \sqrt{\left(-\dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{b}{2}\right)^2 - c}, \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -2\alpha \\ b = -2\beta \\ c = \alpha^2 + \beta^2 - r^2 \end{cases}$$

$C(x_c ; y_c) = (-a/2 ; -b/2)$

$r^2 = (-a/2)^2 + (-b/2)^2 – c = (x_c)^2 + (y_c)^2 – c$

Eq. della circonferenza: $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$

Esempio

$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ è l'equazione della circonferenza con centro *C*(-1,2) e raggio $r^2 = 1^2 + 2^2 - 1 = 4$.

Si segnalano i seguenti casi particolari

a=0, il centro appartiene all'asse y:
b=0, il centro appartiene all'asse x;
c=0, la circonferenza passa per l'origine degli assi.

Condizioni per determinare l'equazione di una circonferenza

Per determinare l'equazione di una circonferenza è necessario determinare i tre parametri (*a, b, c*) dell'equazione generale di una circonferenza.
Ad esempio citiamo i seguenti casi:

1 sono note le coordinate del centro e il raggio;
2 sono note le coordinate degli estremi di un diametro;
3 la circonferenza passa per un punto e sono note le coordinate del centro;
4 la circonferenza passa per tre punti non allineati;
5 la circonferenza passa per due punti e il centro appartiene a una retta nota;
6 sono note le coordinate del centro e la circonferenza è tangente a una retta nota.

Vediamo un esempio per chiarire le idee.

Esempio 1
Determinare l'equazione della circonferenza di centro $C(2,-3)$ e raggio al quadrato = 17.
Quindi:

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 17 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 6y - 4=0$$

Esempio 2
Determinare l'equazione della circonferenza aventi come estremi del diametro A(1,1) e B(3,3).
Il raggio della circonferenza sarà metà del diametro e cioè pari alla metà della distanza tra A ed B:

$$d = \overline{BA} = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$$

da ciò il raggio sarà r=d/2. Così conosco il raggio, ho un punto (anzi due!) della circonferenza, ricado nel caso 1. Potrei anche calcolare il centro C con la formula del punto medio!!!

Esempio 3
Determinare l'equazione della circonferenza di centro $C(2,-3)$ e passante per $A(1,1)$.

- <u>1° modo</u>

Il raggio della circonferenza sarà pari Alla distanza tra C ed A:

$$r = \overline{CA} = \sqrt{1^2 + (-4)^2} = \sqrt{17}$$

Usando l'equazione canonica della circonferenza otteniamo

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 17 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 6y - 4=0$$

- <u>2° modo</u>

Sapendo che C(-a/2 ; -b/2) e che la circ. passa per (x,y)=(1,1), posso costruire il sistema

$$\begin{cases} -a/2 = 2 \\ -b/2 = -3 \\ 1+1+a+b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b= 6 \\ 1+1-4+6+c=0 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 6y - 4=0$$

Esempio 4
Determinare l'equazione della circonferenza che passa per A(0,3), B(-4,1), C(1,1).

Basta imporre il passaggio per i punti dati, sostituendo le loro coordinate nell'equazione canonica.
Si parte, quindi, sostituendo nell'equazione canonica:
$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ le coordinate dei tre punti dati.
Si ottiene allora il sistema:

$$\begin{cases} 9+3b+c=0 \\ 16+1-4a+b+c=0 \\ 1+1+a+b+c=0 \end{cases}$$

che fornisce come soluzione:

$$\begin{cases} a=3 \\ b=-2 \\ c=-3 \end{cases}$$

Pertanto, la circonferenza cercata ha equazione:
$x^2 + y^2 + 3x - 2y - 3 = 0$

Esempio 5
Determinare l'equazione della circonferenza che passa per A(3,1), B(0,-2) e avente ascissa del centro in 2.
Basta imporre il passaggio per i punti dati

$$\begin{cases} 9+1+3a+b+c=0 \\ 4-2b+c=0 \\ -a/2=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} b=2 \\ c=0 \\ a=-4 \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad x^2+y^2-4x+2y=0$$

Esempio 6
Determinare l'equazione della circonferenza che ha per centro C(-2,0) e tangente alla retta $y = -x+2$

Dal centro conosco il valore di a e di b: $-a/2=-2$ e $-b/2=0 \Rightarrow a = 4$ e $b = 0$.
Sostituendo nella generica circonferenza ho: $x^2 + y^2 + 4x + c=0$
Mettendo a sistema la circonferenza e la retta tangente:

$$\begin{cases} x^2+y^2+4x+c=0 \\ y=-x+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2+4+c=0 \\ y=-x+2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ per la condizione di tangenza $\Delta = 0 \Rightarrow -8(4+c) = 0 \Rightarrow c = -4$ e quindi $\mathbf{x^2 + y^2 + 4x - 4 = 0}$

Una retta ed una circonferenza possono essere ***secanti, tangenti*** o ***esterne*** l'una rispetto all'altra.
Dato allora il sistema formato dalla equazione della circonferenza e da quella della retta

$$\begin{cases} x^2+y^2+ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$$

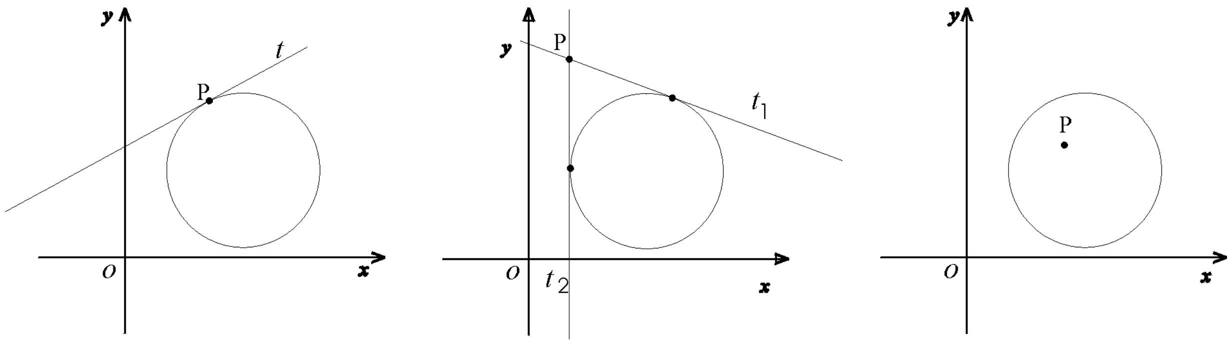
nell'equazione di secondo grado che risolve il sistema (ricavando una delle due variabili in funzione dell'altra nella seconda equazione), abbiamo allora le tre possibilità alternative:

$\Delta > 0$, la retta è *secante*; $\Delta = 0$, la retta è *tangente*; $\Delta < 0$, la retta è *esterna*.

Tangenti alla circonferenza in un punto

Dato un punto $P(x_0;y_0)$ e una circonferenza di equazione $x^2+y^2+ax+by+c=0$, si possono verificare le tre condizioni.

- P è esterno alla circonferenza, le *rette per P tangenti alla circonferenza sono due*;
- P appartiene alla circonferenza, la *retta tangente è una sola*;
- P è interno alla circonferenza, *non esistono rette tangenti* uscenti da P.



Per determinare le equazioni delle eventuali *rette tangenti*, si possono seguire due metodi.

I METODO

- si scrive l'equazione del fascio di rette passanti per $P(x_0,y_0)$

$$y-y_0=m(x-x_0);$$

- si scrive il sistema fra le equazioni del fascio e la circonferenza:

$$\begin{cases} y-y_0=m(x-x_0) \\ x^2+y^2+ax+by+c=0 \end{cases}; \qquad \begin{cases} y=y_0+m(x-x_0) \\ x^2+(y_0+m(x-x_0))^2+\dots \end{cases}$$

- con il metodo di sostituzione si ottiene quindi un'equazione di secondo grado nella variabile x;
- si impone la condizione di tangenza, ossia $\Delta=0$;
- si risolve l'equazione di secondo grado rispetto a m;

  se $m_1 \neq m_2$, le rette tangenti sono due e il punto P è esterno alla circonferenza;

  se $m_1 = m_2$, la retta tangente è una sola e il punto P appartiene alla circonferenza;

  se $m_1, m_2 \notin \mathbf{R}$, non esistono rette tangenti e il punto P è interno alla circonferenza;
- si sostituisce il valore o i valori trovati di m nell'equazione del fascio di rette.

Esempio

Scrivere l'equazione delle rette passanti per *P(0,-4)* e tangenti alla circonferenza $x^2+y^2=4$.
L'equazione della retta generica passante per *P* è:

$$y-(-4)=m(x-0)$$

intersecando con la circonferenza otteniamo

$$\begin{cases} y=mx-4 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}; \qquad \begin{cases} y=mx-4 \\ x^2(1+m^2)-8mx+12=0 \end{cases}$$

imponendo $\frac{\Delta}{4}=0$ si ottiene $\frac{\Delta}{4}=(4m)^2-12(1+m^2)=0$

che ci dà coefficiente angolare delle rette tangenti $m=\pm\sqrt{3}$.

Le due rette sono: $y=\pm\sqrt{3}x-4$

II METODO

- Si determinano le coordinate del centro *C* e del raggio *r* della circonferenza;
- Si scrive l'equazione del fascio di rette passanti per $P(x_0,y_0)$

$$y-y_0=m(x-x_0) \quad \text{cioè} \quad mx-y+y_0-mx_0=0$$

- si applica la formula della distanza fra le rette e il centro *C*;
- si pone tale distanza uguale al raggio e si risolve l'equazione in *m*;
- si sostituisce il valore o i valori trovati di m nell'equazione del fascio di rette.

Se il punto *P* appartiene alla circonferenza, allora la retta tangente è la retta per *P* perpendicolare a *PC*.

INTERSEZIONE TRA CIRCONFERENZE

Due circonferenze possono essere *secanti* in due punti, *tangenti* in uno stesso punto (esternamente o internamente), *una interna all'altra, concentriche o esterne.*

Per determinare gli eventuali punti di intersezione o il punto di tangenza, occorre risolvere il sistema formato dalle equazioni delle due circonferenze.

$$\begin{cases} x^2+y^2+ax+by+c=0 \\ x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$$

E' conveniente risolvere il sistema con il metodo di riduzione.
Sottraendo le due equazioni, si ottiene infatti l'equazione di primo grado

$$(a-a')x+(b-b')y+(c-c')=0$$

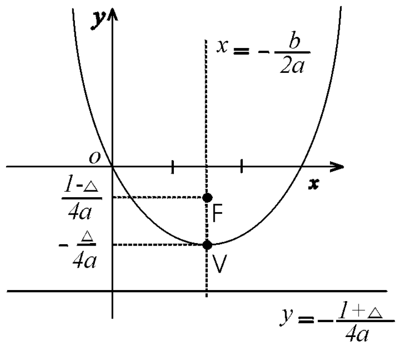
che è l'asse radicale, nella quale si potrà ricavare *x* in funzione di *y* (per esempio) e sostituirla poi in una delle due equazioni della circonferenza.

LA PARABOLA

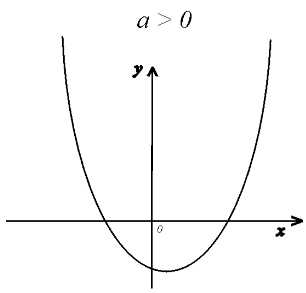
La *parabola* è il luogo geometrico dei punti equidistanti da una retta (*direttrice*) e da un punto (*fuoco*). La retta passante per il fuoco e perpendicolare alla direttrice si chiama *asse* della parabola.
L'asse della parabola è un asse di simmetria e interseca la parabola nel *vertice*.

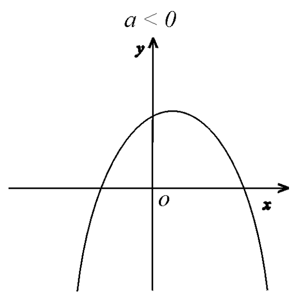
Una *parabola con asse parallelo all'asse y* è rappresentata da un'equazione del tipo

$$y = ax^2 + bx + c \qquad (\text{con } a \neq 0).$$



Concavità e apertura della parabola dipendono dal parametro *a*.





Riassumiamo alcune caratteristiche della parabola nel seguente schema.

Parabola con asse verticale	**Parabola con asse orizzontale**
» equazione cartesiana: $y = ax^2 + bx + c$ » vertice: $V = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ » fuoco: $F = \left(-\frac{b}{2a}; \frac{1-\Delta}{4a}\right)$ » asse: $x = -\frac{b}{2a}$ » direttrice: $y = -\frac{1+\Delta}{4a}$ » coefficiente angolare della retta tangente in un suo punto di ascissa x_0: $m = 2ax_0 + b$	» equazione cartesiana: $x = ay^2 + by + c$ » vertice: $V\left(\frac{4ac - b^2}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$ » fuoco: $F\left(\frac{1 - b^2 + 4ac}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$ » asse: $y = -\frac{b}{2a}$ » direttrice: $x = -\frac{1 + b^2 - 4ac}{4a}$ » coefficiente angolare della retta tangente in un suo punto di ordinata y_0: $m = \frac{1}{(2ay_0 + b)}$

Condizioni per determinare l'equazione di una parabola

Anche nell'equazione della parabola $y = ax^2 + bx + c$ (o $x = ay^2 + by + c$) sono presenti i tre coefficienti *a, b* e *c*. Per poterli determinare occorrono in genere *tre condizioni*.
Alcune possibili condizioni sono le seguenti:

1. sono note le coordinate del vertice e del fuoco;
2. sono note le coordinate del vertice (o del fuoco) e l'equazione della direttrice;
3. la parabola passa per tre punti non allineati;
4. la parabola passa per due punti e si conosce l'equazione dell'asse;
5. la parabola passa per un punto e sono note le coordinate del vertice (o del fuoco);
6. la parabola passa per un punto e sono note le coordinate dell'asse e della direttrice.

Esempio 1
Determinare l'equazione della parabola di vertice V(2,-3) e fuoco F(2, 1).
Da -b/2a = 2 ; - (b2 – 4ac)/4a = -3 ; [1 - (b2 – 4ac)]/4a = 1
e quindi a= 1/16; b= -1/4; c= -11/4 allora **y = (1/16) x2 + (-1/4) x – 11/4**

Esempio 2
Determinare l'equazione della parabola di vertice V(2,-3) e direttrice d=0
Da -b/2a = 2 ; - (b2 – 4ac)/4a = -3 ; d= - [1 + (b2 – 4ac)]/4a = 0 si ha
a= 1/12; b= -1/3; c= -10/3 allora **y = (1/12) x2 + (-1/3) x – 10/3**

Esempio 3
Determinare l'equazione della parabola passante per A(-1,2), B(1;6), C(0;3)
Si ottiene allora il sistema:

$$\begin{cases} 3 = c \\ 6 = a + b + c \\ 2 = a - b + c \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 3 \end{cases}$$

Pertanto, la parabola ha equazione: $\mathbf{y = x^2 + 2x - 2y + 3}$

Esempio 4
Determinare l'equazione della parabola passante per A(-1,2) e B(1;6) e asse y = 2

$$\begin{cases} 3 = c \\ 2 = -\dfrac{1+\Delta}{4a} \\ 6 = a + b + c \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = \ldots \\ \\ b = 2 \\ c = \ldots \end{cases}$$

Esempio 5
Determinare l'equazione della parabola passante per A(-1,2) e ha come vertice V (2,1)

$$\begin{cases} -b/2a = 2 \\ -(b^2 - 4ac)/4a = 1 \\ 2 = a - b + c \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ coordinate vertice V

$\Longrightarrow$ Passaggio per A

Esempio 6

Determinare l'equazione della parabola passante per A(-1,2) e B(1;6) avente come asse y = 2 e direttrice d=0.

$$\begin{cases} -[1+(b^2-4ac)]/4a = 0 \\ 2 = -\dfrac{1+\Delta}{4a} \\ 2 = a-b+c \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ Direttrice d

$\Longrightarrow$ Asse y

$\Longrightarrow$ Passaggio per A

Tangenti alla parabola in un punto

Le *rette tangenti a una parabola*, uscenti da un punto $P(x_0, y_0)$, possono essere due, una o nessuna.

Per determinare le equazioni delle eventuali *rette passanti per* $P(x_0, y_0)$ *e tangenti alla parabola*, si procede nel seguente modo:

- si scrive l'equazione del fascio di rette passanti per $P(x_0, y_0)$,

  $y - y_0 = m(x - x_0)$;

- si scrive il sistema fra le equazioni del fascio e della parabola:

  $$\begin{cases} y - y_0 = m(x - x_0) \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$$

- si perviene all'equazione di secondo grado in x:

  $ax^2 + (b-m)x + (c + mx_0 - y_0) = 0;$

- si calcola Δ:

  $\Delta = (b-m)^2 - 4a(c + mx_0 - y_0)$;

- si pone la condizione di tangenza, ossia $\Delta = 0$:

$(b-m)^2 - 4a(c + mx_0 - y_0) = 0$, ossia $m^2 - 2m(b + 2ax_0) + (b^2 - 4ac + 4ay_0) = 0$;

- si risolve l'equazione di secondo grado rispetto a m:

- - se $m_1 \neq m_2$, le rette tangenti sono due;
- - se $m_1 = m_2$, la retta tangente è una sola e il punto P appartiene alla parabola;
- - l'equazione non ha soluzioni.

- se si trova il valore (o i valori) di m, si sostituisce nell'equazione del fascio di rette determinando così le equazioni delle rette tangenti.

Appunti o osservazioni da annotare:

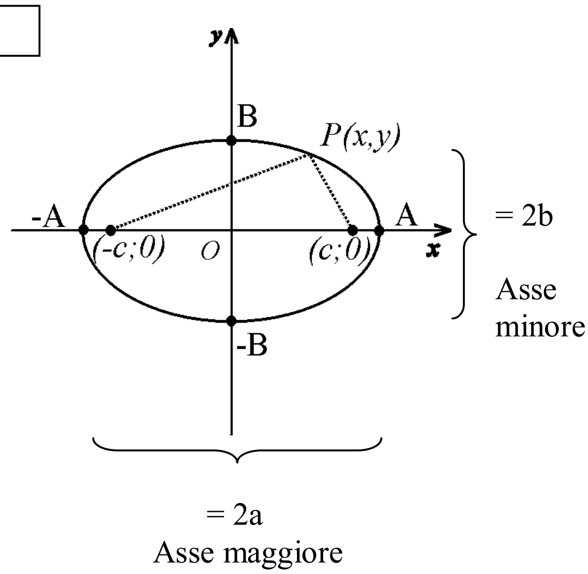
Per l'**ellisse** e l'**iperbole** richiamiamo solo brevemente la forma delle loro equazioni, e le relazioni che legano le coordinate dei punti caratteristici per la loro determinazione come luoghi geometrici.

ELLISSE

- Equazione dell'ellisse riferita al centro degli assi cartesiani

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$ centro *O(0,0)*

Se **a > b**



Fuochi

$F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$

essendo $c^2=a^2-b^2$

Vertici

A(a,0), B(b,0), -A(-a,0), -B(-b,0)

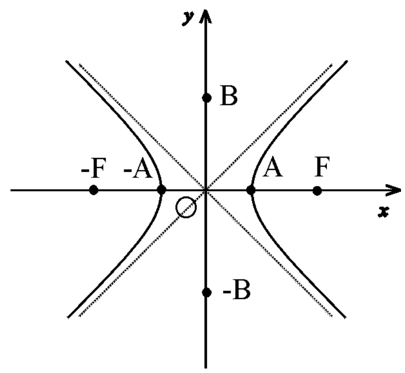
Eccentricità

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \qquad 0\le e<1$$

IPERBOLE

- Equazione dell'iperbole riferita al centro degli assi cartesiani

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$ centro *O(0,0)*



Fuochi

$F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$

essendo $c^2=a^2+b^2$

Vertici

A(a,0), B(0,b)

Asintoti

$$y=\pm\frac{b}{a}x$$

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$$

Per l'iperbole è $e>1$.

Esercizi

1. 1. Disegnare, dopo aver ricavato centro e raggio, le seguenti circonferenze.

$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 11 = 0$
$x^2 + y^2 - 8x - 9 = 0$
$x^2 + y^2 - 2x = 0$
$x^2 + y^2 - x + y + 5 = 0$ [**N.B.:** non è una circonferenza, perchè?]
$x^2 + (y-2)^2 + 9 = 0$
$16x^2 + 16y^2 - 24x + 32y - 7 = 0$ [**N.B.:** Ricorda, devi dividere per 16! Perchè?]

2. 2. Trovare l'intersezione tra retta e circonferenza e rappresentarle graficamente.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 3x - 3y - 2 = 0 \\ 3x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

[A (1; 2) e B (-1; -1)]

3. 3. Determinare l'equazione della circonferenza avente per diametro il segmento di estremi A(-3; 1) e B(2; 5).

[**N.B.:** Il centro è il punto medio del segmento AB ed il raggio si ottiene utilizzando la formula della distanza tra due punti. La circonferenza cercata è $x^2 + y^2 + x - 6y - 1 = 0$]

4. 4. Determinare l'equazione della circonferenza passante per A(2; 0); B(-1; 0) e C(1; 2).

[**N.B.:** Basta risolvere il sistema

$$\begin{cases} 4 + 0 + 2a + 0 + c = 0 \\ 1 + 0 - a + 0 + c = 0 \\ 1 + 4 + a + 2b + c = 0 \end{cases}$$

(perchè?)

per ottenere $x^2 + y^2 - \frac{5}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{8}{3} = 0$]

5. 5. Stabilire se i punti A(1; 5); B(10; 2); C(-1; -2) appartengono o meno alla circonferenza di equazione

$$x^2 + y^2 - 10x - 4y + 4 = 0$$

[si, si, no]

6. 6. Determinare l'equazione delle rette tangenti alla circonferenza $x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0$ nei punti O(0; 0) e A(0; 6).

[**N.B.:** Sono le intersezioni della circonferenza con l'asse delle y. Basterà sfruttare il fatto che il raggio della circonferenza è perpendicolare alla retta tangente nei suoi punti di tangenza….
$4x - 3y = 0$; $4x + 3y - 18 = 0$]

7. 7. Determinare gli eventuali punti di intersezione delle due circonferenze e rappresentarli graficamente.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 + y^2 - 8x - 16y + 30 = 0 \end{cases}$$

[**N.B.:** Ricorda, usa il metodo di riduzione sottraendo….A(-1; 3); B(3; 1)]

8. 8. Data la parabola di equazione

$$y = x^2 - 3x - 4$$

determinare le sue intersezioni con gli assi cartesiani e disegnarla.
Determinare poi i punti di intersezione con la prima bisettrice *(y = x)*

$$\left[\begin{cases} x_{1,2} = 2 \pm 2\sqrt{2} \\ y_{1,2} = ? \end{cases} \right]$$

9. 9. Determinare l'equazione della parabola di vertice V(1; 0) e direttrice *d: y = 2.*
Rappresentarla graficamente

$$\left[y = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{8} \right]$$

10. 10. Determinare l'equazione della parabola passante per i punti A(-1; 0); B(0; 5); C(2; 3).

[Basta risolvere il sistema $\begin{cases} 0 = a - b + c \\ 5 = c \\ 3 = 4a + 2b + c \end{cases}$]

11. 11. Stabilire se la retta di equazione

$$y = x - 4$$

è secante, tangente o esterna alla parabola di equazione

$$y = -x^2 + 3x + 4$$

[secante in A(4; 0) e B(?; ?)]

12. 12. Data la parabola di equazione $y = -x^2 + 2x + 3$, determinare le equazioni delle rette passanti per P(0; -1).

[Puoi risolvere, imponendo il $\Delta = 0$, il sistema

$$\begin{cases} y = mx + m \\ y = x^2 + 2x + 3 \end{cases}$$

ottenendo $m = \pm 2\sqrt{2}$]

13. 13. Disegna l’ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$$

[*a = ? ; b = ?*]

14. 14. Disegna l’iperbole di equazione

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$$

[che equazione hanno gli asintoti?]