MATERIAL DE APOIO PEDAGÓGICO PARA APRENDIZAGENS

2º Ano

Ensino Médio

2024

Matemática e suas Tecnologias
1º Bimestre

GOVERNO DO ESTADO DE MINAS GERAIS
SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE FORMAÇÃO E DESENVOLVIMENTO PROFISSIONAL DE EDUCADORES

SUMÁRIO

MATERIAL DE APOIO PEDAGÓGICO PARA APRENDIZAGENS

MAPA 2024

MATERIAL PARA O(A) PROFESSOR(A)

Prezado(a) Professor(a),

No intuito de contribuir com seu trabalho em sala de aula, preparamos este caderno com muito carinho. Por meio dele, você terá a oportunidade de ampliar o trabalho já previsto em seu planejamento. O presente caderno foi construído tendo como base os Planos de Curso 2024, que foram elaborados a partir das competências e habilidades estabelecidas na BNCC e no CRMG a serem desenvolvidas e trabalhadas por todas as unidades escolares da rede pública de Minas Gerais. Aborda os diversos componentes curriculares e para facilitar a leitura e manuseio foi organizado de forma linear. Contudo ao implementá-lo em sala de aula, você professor, poderá recorrer aos planejamentos de forma não sequencial, atendendo às necessidades pedagógicas dos estudantes. É preciso atentar-se, apenas, para os conhecimentos que são pré-requisitos, ou seja, aquele que foram trabalhados nos planejamentos anteriores e que precisam ser retomados com os estudantes para a construção do novo conhecimento em questão.

Como o principal objetivo deste material é o trabalho com o desenvolvimento de habilidades, este caderno vem com o propósito de dialogar com sua prática e com o seu planejamento dentro das habilidades básicas - aquelas que devemos assegurar que todos os nossos estudantes aprendam.

Por assim dizer, destacamos ainda, que o livro didático continua sendo um instrumento eficiente e necessário, principalmente por não anular o papel do professor de mediador insubstituível dentro dos processos de ensino e de aprendizagem. Coracini (1999) nos diz que “o livro didático já se encontra internalizado no professor (...) o professor continua no controle do conteúdo e da forma (...)”, reafirmando que, o que torna o livro didático e o que torna os Cadernos MAPA eficientes, é justamente a maneira como o professor utiliza-os junto aos estudantes.

Desejamos a você, professor(a), um bom trabalho!

Equipe da Escola de Formação e Desenvolvimento Profissional de Educadores

MATERIAL DE APOIO PEDAGÓGICO PARA APRENDIZAGENS – MAPA

ANO DE ESCOLARIDADE	REFERÊNCIA	ANO LETIVO
1 º ano	*Ensino Médio*	*2024*

COMPONENTE CURRICULAR	ÁREA DE CONHECIMENTO
Matemática	*Matemática e suas tecnologias*

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA:	
Competência 3: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.	
OBJETO(S) DE CONHECIMENTO:	**HABILIDADE(S):**
Matriz e Determinante. Sistemas de equações lineares. Escalonamento. Gráficos de funções lineares com uma ou duas variáveis.	(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

PLANEJAMENTO

TEMA DE ESTUDO: Jogo de Xadrez é uma Matriz?

A) APRESENTAÇÃO:

Neste planejamento de Matemática será explorado o trabalho com matrizes compreendendo e analisando as suas dimensões conceituais e práticas, através de momentos pedagógicos baseados em aulas com temas atuais e jogos.

O presente planejamento busca desenvolver a habilidade fundamental para o estudo dos Matrizes, habilidade (EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Essa habilidade refere-se à compreensão das equações lineares simultâneas, porém para termos a compreensão do comportamento dos sistemas lineares é necessário estudar sobre matriz e determinantes. Desenvolvendo essa habilidade, é possível aumentar significativamente os contextos que podem ser explorados em situações problemas nas quais o estudante é levado a determinar.

A apreensão dos princípios matemáticos e a sua aplicabilidade desempenham um papel vital no desempenho de uma série de tarefas que fazem parte do dia a dia das pessoas. Nas instituições de ensino de nível básico, o ensino da Matemática tem como um dos propósitos simplificar as atividades diárias dos indivíduos, esforçando-se constantemente para estabelecer conexões concretas entre os conceitos teóricos e suas aplicações práticas.

Com foco na resolução de problemas e na interpretação de situações em contextos diversos de diferentes áreas, é essencial que o estudante se aproprie inicialmente do conceito de matrizes para depois aprender os procedimentos e as diferentes maneiras de expressar as equações lineares, usando técnicas algébrica e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais para finalmente ser capaz de interpretar e elaborar sistemas lineares.

Como o conceito de matrizes está associado a diferentes situações, essa habilidade está relacionada a diversas áreas do conhecimento. Entre elas, pode-se citar inter-relações com a área de Ciências que estão habituados com a matriz e suas propriedades, algumas de suas aplicações no cotidiano como uma poderosa e eficaz ferramenta de trabalho para muitas áreas da ciência, Tecnologia, Estatísticas, na Economia, na Física Atômica entre outros setores. Como Teoria dos Grafos, Computação Gráfica, Tomografia Computadorizada e Criptografia

Visando a consolidação da habilidade norteadora deste planejamento, o mesmo tem como objetivo final de aprendizagem: Definir Matrizes como operação matemática que determina estratégias de seguir um caminho ou usar em um jogo de Xadrez, etc. Construir gráficos através das matrizes e equações lineares. Relacionar expressões algébricas de sistemas lineares a valores mostrados em um gráfico correspondente.

B) DESENVOLVIMENTO:

1º MOMENTO: CONHECENDO O CONCEITO DE MATRIZ

Organização da turma	A escolha do professor.
Recursos e providências	Texto impresso. Geogebra. Internet.

Professor, neste primeiro momento, apresente aos estudantes o objeto de conhecimento, elabore a definição, explore as propriedades e ensine dentre outras informações a respeito do conteúdo.

TEXTO: MATRIZES (☚ ícone clicável)

2º MOMENTO: USO DO GEOGEBRA PARA CONSTRUÇÃO DE MATRIZ (ATIVIDADE EXTRA)

Organização da turma	A escolha do professor.
Recursos e providências	Texto impresso. Geogebra. Internet.

Professor, para desenvolver o conhecimento proponha o estudante criar atividades no caderno e também utilizar da tecnologia para formar matrizes no Geogebra (https://www.geogebra.org/calculator?lang=pt) para que os estudantes possam construir, reconhecer e resolver matrizes que após a consolidação desses conhecimento, tenham condições de identificar equações lineares de forma algébricas como matriz fazendo uso ou não da tecnologia.

Caro professor, pode usar o laboratório da escola para contribuição do conhecimento junto às ferramentas tecnológicas.

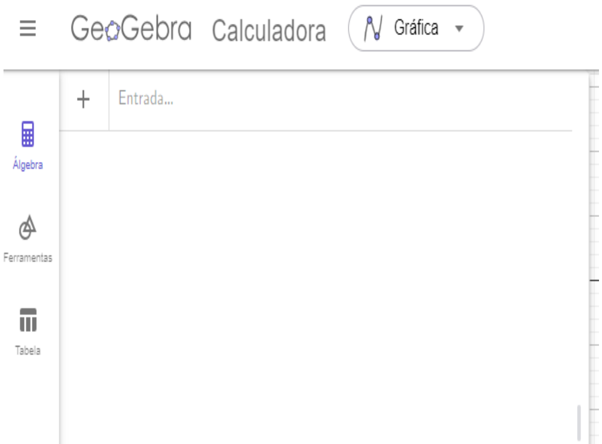
Atividade em dupla: Ao abrir o Geogebra, vamos digitar no campo entrada a Letra X da matriz com igual e após colocaremos entre chaves cada termo sendo o geral e os demais.

Exemplo:

DIGITE NO CAMPO: + (entrada):   X={{20, 18, 25}, {12, 10, 15}, {15, 9, 20}, {18, 15, 21}}.

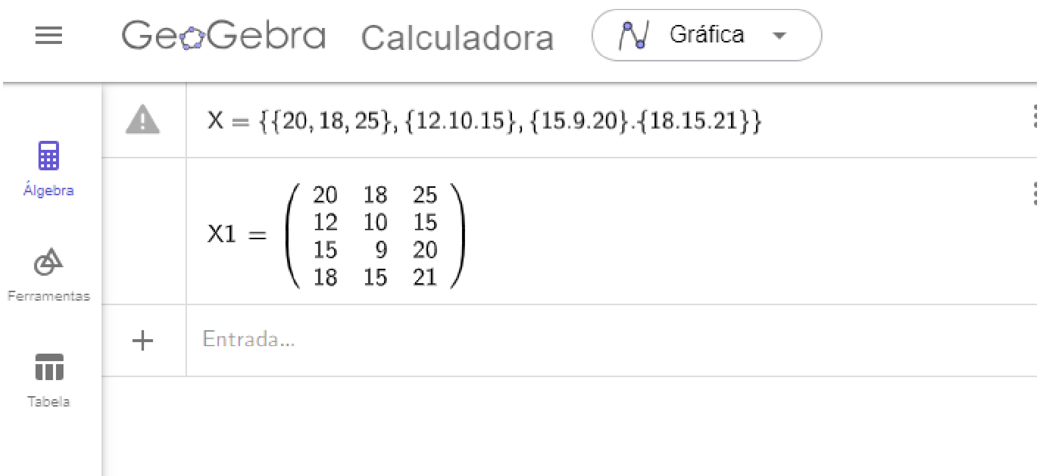
Exemplo:

Figura 3: Geogebra



Fonte: (Geogebra, 2023)

Figura 4: Criando Matriz na Geogebra.



Fonte: (Geogebra, 2023)

3º MOMENTO: CONHECENDO O CONCEITO DE DETERMINANTES

Organização da turma	A escolha do professor.
Recursos e providências	Texto impresso. Geogebra. Internet. Quadro

Professor (a), neste primeiro momento, apresente aos estudantes o objeto de conhecimento, elabore a definição, explore as propriedades e ensine dentre outras informações a respeito do conteúdo e fique à vontade.

TEXTO: DETERMINANTES (ícone clicável)

4º MOMENTO: JOGO DE XADREZ

Organização da turma	A escolha do professor
Recursos e providências	Jogo de Xadrez e Xadrez online.

Jogo de Xadrez

A inclusão de jogos no ambiente escolar é de grande importância, e é essencial dedicarmos uma parte específica em nosso planejamento para que os educadores possam explorar de maneira abrangente todas as potencialidades dos jogos. Isso envolve não apenas a etapa de resolução em si, mas também a oportunidade de registrar e discutir as variadas abordagens que podem surgir durante a solução de problemas matemáticos.

O xadrez é uma ferramenta excelente para desenvolver habilidades em estudantes, podendo ser aplicado em qualquer nível de ensino.

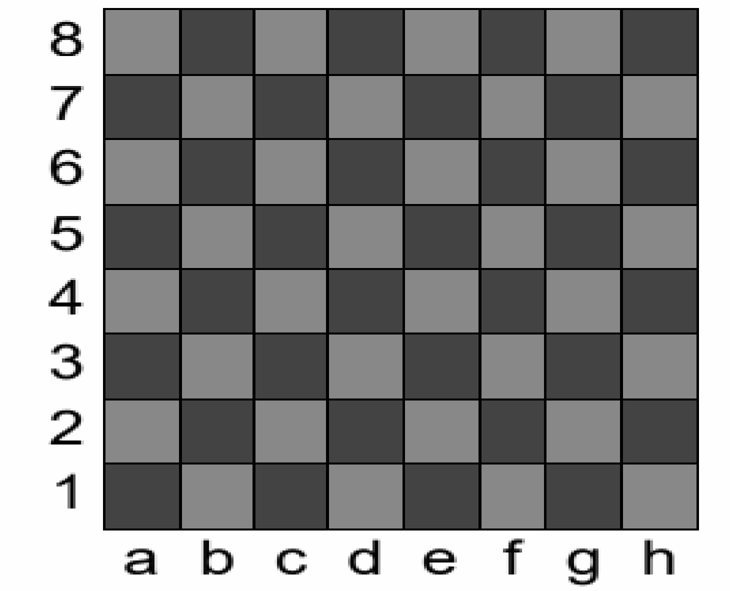
O xadrez, ao ser incorporado no estudo da matemática, destaca-se por sua relevância no desenvolvimento cognitivo. Ao promover simulações de situações-problema, o jogo exige a organização de procedimentos para a resolução.

Essa abordagem contribui significativamente para o ensino da disciplina, já que estimula a tomada de decisões, desenvolve o pensamento crítico e permite aprendizado por meio de tentativas e erros, uma abordagem comum em problemas matemáticos.

Da mesma forma que uma jogada errada pode levar à perda do jogo, os estudantes aprendem a adotar as melhores estratégias, refletindo de maneira prática o processo de tomada de decisões no cotidiano, onde escolhas são constantemente exigidas.

O professor nessa atividade deve trabalhar com a ideia do tabuleiro de xadrez para que os estudantes possam ter condições de reconhecer as linhas e colunas e daí em diante trabalhar as regras do jogo. Adquirindo o conhecimento adquirido, que pretendia-se propiciar as noções relacionadas ao conteúdo “Matriz“, como: saber e diferenciar linhas e colunas e identificar um elemento a_{ij} .

Figura 5: Tabuleiro de xadrez



Fonte: (Assis, 2023)

A finalidade ao abordar esse conteúdo foi, principalmente, adquirir a compreensão de que as linhas se estendem horizontalmente, enquanto as colunas se desenvolvem verticalmente. Dessa maneira, é possível notar que as coordenadas das casas são determinadas pelo ponto de interseção entre as linhas e colunas. Esse conhecimento serve como base para a subsequente habilidade de localizar pontos no Plano Cartesiano.

1. Explorando o tabuleiro:
    a) Quantos quadrados você visualiza.
    b) Identifique a grande diagonal formada por casas negras, e faça a nomeação das casas.
    c) Como é nomeada a 5ª casa da coluna do rei?
    d) Qual casa está situada na interseção da 4ª coluna com a 3ª linha?

2. Utilizar o jogo grátis de xadrez online, no laboratório de informática. https://pt.chesstempo.com/play-chess-online/

3. Em uma atividade lúdica, consiga um espaço na escola e monte um tabuleiro com os estudantes e desenvolva o jogo, produzindo um desenvolvimento do raciocínio lógico e resolução de problemas.

ANEXO

TEXTO: MATRIZES

Matrizes

A matriz **m**×**n** é uma tabela retangular ou quadrada com **m · n** elementos dispostos em **m** linhas e **n** colunas, com a quantidade de elementos **m , n** ≥ **1.** Dessa forma, o número de linhas é primeiro e depois o número de colunas. A matriz é uma tabela cujos elementos são os números escolhidos a partir de um conjunto numérico dos números reais.

Veja um exemplo:

A tabela indica o número de vendas efetuadas por uma concessionária de veículos durante o primeiro trimestre.

Tabela 1: Veículos/modelos vendidos por mês

Matriz	1ª coluna	2ª coluna	3ª coluna	4ª coluna
m x n	Veículos/mês	Janeiro	Fevereiro	Março
1ª linha	Honda City	20	18	25
2ª linha	Fiat Pulse	12	10	15
3ª linha	VW Polo	15	9	20
4ª linha	Hyundai Creta	18	15	21

Fonte: (Assis, 2023)

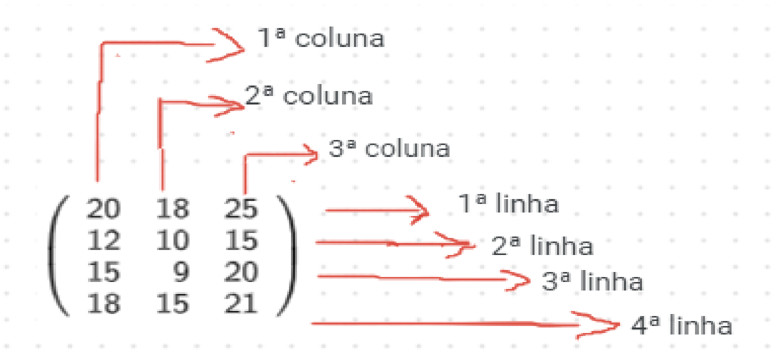
Se quisermos saber a quantidade de carros VW Polo vendidos em janeiro, iremos procurar o número na terceira linha e na primeira coluna da tabela.

Portanto, no quadro apresentado, os números colocados nas disposições horizontais (**m**) formam o que determinamos **linhas** e os colocados nas disposições verticais(**n**) chamamos de **coluna.** O conjunto ordenado dos números formam a tabela e é denominado **matriz** e cada número é chamado **elemento** da matriz.

Nesse exemplo acima, temos uma matriz do tipo 4 x 3 (Lê-se: quatro por três), isto é, uma matriz formada por 4 linhas e três colunas.

Representa-se uma matriz colocando-se seus elementos entre parênteses ou colchetes.

Matriz 4 x 3



Fonte: (Assis, 2023)

Uma matriz A de ordem $m \times n$ pode ser representada genericamente por A = $(a_{ij})_{m \times n}$ e expressa da maneira apresentada ao lado.

Nessa matriz a_{ij} indica o elemento que está na linha *i* e coluna *j.* O elemento a_{13}(lê-se " a um tres"), por exemplo, tem *i = 1 e j = 3,* ou seja, ele está localizado na primeira linha e na terceira coluna.

Figura 2: Matriz Genérica.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Fonte: (Assis, 2023)

Exemplos de matrizes:

Matriz 1 x 2:

$$A = (3 \quad 2)$$

Matriz 2 x 1

$$B = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Matriz 2 x 3

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 11 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

Matriz 2 x 2

$$D = \begin{pmatrix} 20 & 40 \\ 30 & 50 \end{pmatrix}$$

Matriz 3 x 3

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Matriz 4 x 4

$$F = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 & 40 \\ 100 & 200 & 300 & 400 \\ 1000 & 2000 & 3000 & 4000 \\ 10000 & 20000 & 30000 & 40000 \end{pmatrix}$$

Denominamos **Matriz Quadrada** toda matriz de ordem *m x n*, em que *m = n*, ou seja, as quantidades de linhas e de colunas são iguais. Nesse caso, podemos dizer que a matriz é de ordem n. Em uma matriz quadrada A = $(a_{ij})_n$, os elementos a_{ij} em que *i = j* formam a **diagonal principal da matriz.**

Igualdade de matrizes

Duas matrizes A e B, de mesma ordem, são iguais quando cada elemento de A é igual ao correspondente (mesma posição) em B. Assim indicamos: *A=B.*

Para indicar que duas matrizes A e B são diferentes, ou seja, não tem a mesma ordem ou não tem todos os elementos correspondentes iguais, escrevemos: $A \neq B$.

Observe alguns exemplos:

1º Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -1 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$ e $$B = \begin{pmatrix} 2.4 & 10-5 \\ -2+1 & 8-4 \\ 2.3 & \frac{14}{2} \end{pmatrix}$$

As matrizes têm a mesma ordem e os elementos correspondentes são iguais. Portanto, *A=B.*

2º Exemplo:

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 11 \end{pmatrix} \text{ e } D = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Os elementos das matrizes C e D, não tem a mesma ordem. Portanto, $C \neq D$.

3º Exemplo:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \text{ e } F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

As matrizes E e F têm a mesma ordem, porém os elementos $e_{21} \neq f_{21}$ são diferentes. Portanto $E \neq F$

Algumas matrizes recebem nomenclaturas especiais de acordo com as suas características, sendo elas:

- Matriz linha:
  Toda matriz de ordem $1 \times n$.
- Matriz coluna:
  Toda matriz de ordem $m \times 1$.
- Matriz diagonal:
  Toda matriz quadrada em que $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$.
- Matriz nula:
  Toda matriz m xn em que $a_{ij} = 0$ para quaisquer que sejam i e j. Indicamos a matriz nula de ordem $m \times n$ por $0_{m \times n}$.
- Matriz identidade:
  Toda matriz quadrada em que $a_{ij} = 1$ para que $i = j$ e $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Indicamos a matriz identidade de ordem n por I_n.

Operações com matriz:

- **Soma de matriz.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

- **Produto de um número pela matriz.**

$$2.\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 & 2.6 \\ 2.7 & 2.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 14 & 16 \end{pmatrix}$$

Produto de uma matriz

A grande novidade operacional entre matrizes é a multiplicação, sobre a qual falaremos a seguir.

Em Álgebra Linear, as matrizes surgem principalmente associadas a transformações lineares e o produto de duas matrizes é naturalmente definido como a matriz associada à composta de duas transformações lineares.

Por exemplo, sejam A, C: R² → R² transformações lineares dadas por

$A_{(x,y)} = (a_1x + b_1y,\ a_2x + b_2y)$
$C_{(x,y)} = (c_1x + d_1y,\ c_2x + d_2y),$

para todo v = (x, y) ∈ R².

As matrizes dessas transformações são, respectivamente,

$$a = \begin{pmatrix} a1 & b1 \\ a2 & b2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad c = \begin{pmatrix} c1 & d1 \\ c2 & d2 \end{pmatrix}$$

A transformação linear AC: R²→ R², chamada a composta de A e C (ou o produto de A por C) é definida pondo-se

(AC)v = A(Cv),

para todo v = (x, y) ∈ R². Assim, o transformado do vetor v pela transformação AC é o transformado do vetor Cv por A.

Vejamos qual é a matriz da composta AC. Para v = (x, y), temos:

$$\begin{aligned} (AC)v &= A(C(x, y)) = A(c_1x + d_1y,\ c_2 + d_2y) \\ &= (a_1(c_1x + d_1y) + b_1(c_2x + d_2y),\ a_2(c_1x + d_1y) + b_2(c_2x + d_2y)) \\ &= ((a_1c_1+b_1c_2)x + (a_1d_1+b_1d_2)y,\ (a_2c_1+b_2c_2)x + (a_2d_1+b_2d_2)y). \end{aligned}$$

Logo a matriz de AC é

$$m = \begin{bmatrix} a_1c_1 + b_1c_2. & a_1d_1 + b_1d_1 \\ a_2c_1 + b_2c_2. & a_2d_1 + b_2d_2 \end{bmatrix}$$

Esta matriz é chamada de produto das matrizes ***a*** *e* ***c***. Escreve-se ***m = ac***.

Observe que os elementos da matriz ac são obtidos tomando os produtos internos dos vetores-linha de a pelos vetores-coluna de c ordenadamente. Assim, por exemplo, o elemento de ac que está na segunda linha e primeira coluna é a_2,c_1+b_2,c_2, produto interno do vetor (a_2, b_2), segunda linha de a, pelo vetor (c_1, c_2), primeira coluna de c.

Exemplo: Sejam $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 1 \end{bmatrix}$. Encontre o valor de A × B.

Como A = A_{3x2} e B_{2x3}, o resultado é uma matriz 3 × 3, conforme calculado abaixo:

$$\begin{bmatrix} 1\cdot4+(-1)\cdot4 & 1\cdot2+(-1)(-5) & 1\cdot3+(-1)\cdot1 \\ 2\cdot4+2\cdot4 & 2\cdot2+2\cdot(-5) & 2\cdot3+2\cdot1 \\ 3\cdot4+4\cdot4 & 3\cdot2+4\cdot(-5) & 3\cdot3+4\cdot1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 2 \\ 16 & -6 & 8 \\ 28 & -14 & 13 \end{bmatrix}.$$

TEXTO: DETERMINANTES

Determinante é um número real que se associa a uma matriz quadrada.

Determinante de uma matriz quadrada de 2ª ordem.

Dada a matriz quadrada de 2ª ordem

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{bmatrix}$$

Chama-se determinante associado à matriz A (ou determinante de 2ª ordem) e o número real obtido pela diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal pelo dos elementos da diagonal secundária.

Então, determinante de A.

Diagonal Principal — Diagonal secundária

$$A = (a_{11}.a_{22}) - (a_{12}.a_{21})$$

indica-se: $det\ A = |A| = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$

Exemplo 1:

Achar o valor do determinante $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ = 1.4 - 2.3 = 4 - 5 = -1

Resposta: -1

Exemplo 2:

Resolva a equação $\begin{pmatrix} x+3 & 2 \\ x-1 & 5 \end{pmatrix}$ **=** 0.

Resolução:

$\begin{pmatrix} x+3 & 2 \\ x-1 & 5 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{5}(x+\boldsymbol{3}) - \boldsymbol{2}(x-\boldsymbol{1}) = \boldsymbol{0}$

$\Rightarrow$ **5x + 15 - 2x + 2 = 0**

$\Rightarrow$ **3x = -17**

$\Rightarrow x = -\frac{17}{3}$

$S = \left\{-\frac{17}{3}\right\}$

Determinante de uma matriz de 3ª ordem.

Método: ***- Pelo Teorema de Laplace:*** O determinante de uma matriz de 3ª ordem, é igual à soma dos produtos dos elementos de uma linha ou coluna qualquer pelos respectivos cofatores.

$$\text{Det A} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

Consideramos a matriz quadrada de 3ª ordem:

$$A = \begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a23 & a33 \end{pmatrix}$$

Define-se como determinante da matriz A o número:

$$\det A = \begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a23 & a33 \end{pmatrix}$$

det A = $a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$

Agrupando-se os termos que têm a_{11},a_{12} e a_{13}, isto é, os elementos da 1ª linha e colocando-os em evidência, vem:

det A = $a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$

det A = $a_{11}.(a_{22}.a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) - a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$, em que:

det A = $a_{11}. \begin{pmatrix} a22 & a23 \\ a32 & a33 \end{pmatrix} - a_{12}. \begin{pmatrix} a21 & a23 \\ a31 & a33 \end{pmatrix} - a_{13}. \begin{pmatrix} a21 & a22 \\ a31 & a32 \end{pmatrix}$, em que:

$\begin{pmatrix} a22 & a23 \\ a32 & a33 \end{pmatrix}$ = A_{11} é o cofator de a_{11}.

$-\begin{pmatrix} a21 & a23 \\ a31 & a33 \end{pmatrix}$ = A_{12} é o cofator de a_{12}.

$\begin{pmatrix} a21 & a22 \\ a31 & a32 \end{pmatrix}$ = A_{13} é o cofator de a_{13}.

Logo: **Det A =** $\boldsymbol{a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}}$

Exemplo: calcular o determinante da matriz A, sendo $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Calcularemos o det A de duas formas:

a) Pelos elementos da 1ª linha: det A = $a_{11}A_{11}+ a_{12}A_{12}+ a_{13}A_{13}$.

$A_{11}=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=14$ $\quad A_{12}=\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}=+30$ $\quad A_{13}=\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}=-24$

det A = 2(14) + (-1)(30) + 3(-24) ⇒ det A= 28-30-72 ⇒ **det A = -74**

b) Pelos elementos da 1ª coluna: det A **=** = $a_{11}A_{11}+ a_{21}A_{21}+ a_{31}A_{31}$.

$A_{11}=14$ $\quad A_{21}=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = -5$ $\quad A_{31}=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = -17$

det A = 2(14) + 0(-5) + 6(-17) ⇒ det A= 28 + 0 - 102 ⇒ **det A = -74**

Observe que para se aplicar esse método é melhor escolher a linha ou a coluna que tiver o maior número de **zeros**.

Regra de Sarrus

Podemos obter o determinante de uma matriz quadrada de 3ª ordem utilizando uma regra pratica muito simples denominada **regra de Sarrus.**

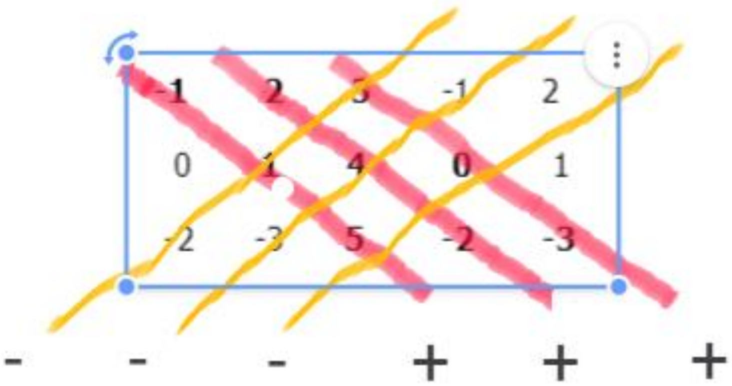
Seja a Matriz $A = \begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a23 & a33 \end{pmatrix}$

Vamos repetir a 1ª e a 2ª colunas à direita da matriz, conforme o esquema abaixo:

Multiplicando os termos entre si, seguindo os traços em diagonal e associando aos produtos o sinal indicado, temos:

det A = $a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$

Exemplo: Calcular o determinante da matriz A, sendo $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$



det A = (-1)(1)(5) + (2)(4)(-2) + (3)(0)(-3) - (-2)(1)(3) - (-3)(4)(-1) - (5)(0)(2)

det A = -5 - 16 + 0 + 6 - 12 - 0

det A = - 27

Observação: Determinante de uma matriz quadrada de ordem n > 3. Para o cálculo desse determinante, aplicaremos o teorema de Laplace, até chegarmos a um determinante de 3ª ordem, e depois empregaremos a regra de Sarrus.

Det A = $a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA:	
Competência 3: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.	
OBJETO(S) DE CONHECIMENTO:	**HABILIDADE(S):**
Matriz e Determinante. Sistemas de equações lineares. Escalonamento; Gráficos de funções lineares com uma ou duas variáveis.	(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

PLANEJAMENTO

TEMA DE ESTUDO: Sistematizando.

A) APRESENTAÇÃO:

Neste planejamento de Matemática será explorado o trabalho com Sistemas Lineares e método da eliminação gaussiana (também chamado de escalonamento) compreendendo e analisando as suas formas e maneiras de resolver.

O presente planejamento busca desenvolver a habilidade fundamental para o estudo das Matrizes por meio da habilidade (EM13MAT301) resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Essa habilidade refere-se à compreensão das equações lineares simultâneas, porém para termos a compreensão do comportamento dos sistemas lineares é necessário estudar sobre matriz e determinantes. Desenvolvendo essa habilidade, é possível aumentar significativamente os contextos que podem ser explorados em situações problemas nas quais o estudante é levado a determinar.

A apreensão dos princípios matemáticos e a sua aplicabilidade desempenham um papel vital no desempenho de uma série de tarefas que fazem parte do dia a dia das pessoas. Nas instituições de ensino de nível básico, o ensino da Matemática tem como um dos propósitos simplificar as atividades diárias dos indivíduos, esforçando-se constantemente para estabelecer conexões concretas entre os conceitos teóricos e suas aplicações práticas.

Para que os estudantes possam abordar a resolução de problemas e a interpretação de situações em contextos variados de diferentes áreas, é fundamental que eles compreendam, inicialmente, o conceito de Sistemas Lineares. A partir desse entendimento, eles podem, então, aprender os métodos e as diversas formas de representar equações lineares, utilizando abordagens algébricas e gráficas, com ou sem o auxílio de tecnologias digitais. Esse conhecimento prepara os estudantes para interpretar e desenvolver sistemas lineares de maneira eficaz.

Visando a consolidação da habilidade norteadora deste planejamento, o mesmo tem como objetivo final de aprendizagem: definir sistemas de equações lineares como operação matemática que determina estratégias de resolução de problemas, construir gráficos através das equações lineares, relacionar expressões algébricas de sistemas lineares a valores mostrados em um gráfico correspondente.

B) DESENVOLVIMENTO:

1º MOMENTO: EQUAÇÕES E SISTEMAS LINEARES.

Organização da turma	A escolha do professor.
Recursos e providências	Texto impresso. projetor multimídia,

Professor é importante consolidar o que são equações lineares para que após esse aprendizado concreto, possa contribuir com o uso dos sistemas de equações lineares.

TEXTO: EQUAÇÃO LINEAR

2º MOMENTO: EXERCITANDO O CONHECIMENTO

Organização da turma	De 4 a 5 estudantes
Recursos e providências	Texto impresso ou quadro

Professor(a), para este momento, trabalhe com os estudantes em grupo, divida os mesmos em grupos de 4 a 5 estudantes, solicitando que leiam e respondam às atividades propostas. Esclareça possíveis dúvidas sobre a atividade ou sobre o tema durante a leitura e realização das atividades.

ATIVIDADES (☛ ícone clicável)

Após realizarem estas propostas de trabalho em grupo, faça uma discussão com os estudantes sobre os resultados obtidos, ouvindo todos os grupos, sem demonstrar quem está certo ou errado. Em seguida, corrobore para que comparem os resultados dos grupos, discuta com os estudantes os motivos que podem ter levado a diferença nos resultados e apresente a solução para as questões propostas e esclareça possíveis dúvidas.

TEXTO: EQUAÇÃO LINEAR

Equação linear

Vamos relembrar o que são equações lineares. Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e b números (reais) conhecidos, e sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ incógnitas.

$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b.$

Neste contexto $a_1, a_2, \ldots, a_n$, são chamados de *coeficientes*, **b** é chamado de *termo independente* e $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são as *variáveis.*

Então, o nome "equações lineares" faz alusão a uma reta. Em verdade, conforme já estudamos anteriormente, quando temos apenas duas variáveis (n = 2) o conjunto dos pontos (x_1, x_2) que satisfazem a equação $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ realmente representa uma reta no plano cartesiano x_1 **Ö** x_2. Para três variáveis, é possível mostrar que o conjunto solução de uma equação linear $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$ corresponde a um plano no espaço. Para duas e três variáveis, esse estudo geométrico de equações e sistemas lineares será feito com detalhes no módulo seguinte ("Sistemas Lineares e Geometria Analítica").

Os dois exemplos a seguir colecionam alguns exemplos de equações, lineares e não-lineares.

Exemplo 1. A expressão 4x − 3y = 12 é uma equação linear com duas variáveis, x e y, com coeficientes 4 e −3, respectivamente, e com termo independente 12.

Exemplo 2. A expressão $2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 18$ é uma equação linear com três variáveis, x_1, x_2 e x_3, com coeficientes 2, −3 e 5, respectivamente, e com termo independente 18.

Sistemas Lineares

Dadas n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$, um sistema linear (sobre estas variáveis) é um sistema onde cada equação é uma equação linear (sobre as mesmas variáveis). Se o sistema possui *m* equações, então, para cada ındice *i* de 1 a *m*, vamos representar por b_i o termo independente da *i*–ésima equação, e por $ai_1, ai_2, \ldots, ai_n$ os coeficientes de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, respectivamente, nesta mesma equação. Note que alguns dos coeficientes das equações (isto é, alguns dos números reais a_{ij}), podem ser nulos. Assim, o sistema linear possui a seguinte forma geral:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Uma solução de um sistema linear como acima é uma atribuição de valores às variáveis para a qual todas as equações do sistema sejam satisfeitas (quer dizer, tornem-se igualdades verdadeiras). Por sua vez, o conjunto-solução do sistema é justamente o conjunto de todas as soluções do sistema. Representamos uma solução $x_{\boldsymbol{1}}= a_{\boldsymbol{1}}$, $x_{\boldsymbol{2}} = a_{\boldsymbol{2}}$, . . . , $x_n = a_n$ do sistema linear acima pela *n*–upla $(a_{\boldsymbol{1}}, a_{\boldsymbol{2}}, \ldots, a_n)$

Assim, o número que ocupa a *i*–ésima posição (da esquerda para a direita) na *n*–upla acima corresponde ao valor da *i*–ésima variável x_i na solução.
Denotando por R^n= R × R × . . . × R (o produto cartesiano de n fatores R) o conjunto formado por todas as n-uplas de números reais, podemos dizer que o conjunto solução do sistema linear (2) é um subconjunto de R^n. Dois sistemas lineares são *equivalentes* se possuírem o mesmo conjunto de variáveis e os mesmos conjuntos de solução.

Classificação de sistemas lineares

Em relação aos números de soluções, um sistema linear pode ser classificado em um dos seguintes tipos:

1. Possível: quando seu conjunto-solução é não vazio, ou seja, quando existe pelo menos uma solução.

Dentre os sistemas possíveis, há dois tipos distintos:

(a) Determinado: quando existe apenas uma solução.
(b) Indeterminado: quando existe mais de uma solução.

2. Impossível: quando seu conjunto-solução é vazio.

É óbvio que exatamente um dos casos acima deve acontecer. Contudo, uma observação interessante é que sempre que um sistema linear possui mais do que uma solução, ele possuirá infinitas soluções.

Para demonstrar este fato, suponhamos que $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ e $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ sejam soluções distintas do sistema linear(2).

Podemos verificar facilmente que, para qualquer número real t, a *n*–upla $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, com
$\gamma_j = t_{\alpha j}$ + (1 − t)β_j para $1 \le j \le n$, também é uma solução. De fato, basta verificar que
$(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ satisfaz cada uma das equações de (2).

Para cada índice *i* tal que $1 \le i \le m$, vamos olhar para a *i*-ésima equação do sistema,
$a_{i\boldsymbol{1}}x_{\boldsymbol{1}} + \cdots + a_{in}x_n = b_i$.

Já sabemos que $a_{i\boldsymbol{1}}\alpha_{\boldsymbol{1}} + \cdots + a_{in}\alpha_n = b_i$ e $a_{i\boldsymbol{1}}\beta_{\boldsymbol{1}} + \cdots + a_{in}\beta_n = b_i$.

Multiplicando-se a primeira equação por t e a segunda por $1 - t$, obtemos:

$ta_{i\boldsymbol{1}}\alpha_{\boldsymbol{1}} + \cdots + ta_{in}\alpha_n = t\beta_i$ e $(\boldsymbol{1} - t)a_{i\boldsymbol{1}}\beta_{\boldsymbol{1}} + \cdots + (\boldsymbol{1} - t)a_{in}\beta_n = (\boldsymbol{1} - t)\beta_i$.

Somando membro a membro as duas equações acima, obtemos

$a_{i\boldsymbol{1}}(t\alpha_{\boldsymbol{1}} + (\boldsymbol{1} - t)\beta_i) + \cdots + a_{in}(t\alpha_n + (\boldsymbol{1} - t)\beta_n) = (t + \boldsymbol{1} - t)\beta_i$ ou, o que é o mesmo, $a_{i\boldsymbol{1}}\gamma_{\boldsymbol{1}} + \cdots + a_{i\boldsymbol{1}}\gamma_n = b_i$. Como isso vale para todo índice *i* tal que $1 \le i \le m$, concluímos que $(\gamma_{\boldsymbol{1}}, \ldots, \gamma_n)$ também é solução do sistema. Agora, como $(\alpha_{\boldsymbol{1}}, \ldots, \alpha_n)$ δ= $(\beta_{\boldsymbol{1}}, \ldots, \beta_n)$, existe pelo menos um índice *j*, com $1 \leq j \leq n$, tal que $a_j\delta = \beta_j$. Sendo esse o caso, é imediato que o número $t\alpha_j + (\mathbf{1} - t)\beta_j$ pode assumir qualquer valor real desejado, bastando escolhermos um valor conveniente para t. Portanto, a fórmula que define $(\gamma_{\mathbf{1}}, \ldots, \gamma_n)$ em termos de $(\alpha_{\mathbf{1}}, \ldots, \alpha_n)$ e $(\beta_{\mathbf{1}}, \ldots, \beta_n)$ gera uma infinidade de soluções para o sistema linear (2).

Por outro lado, dependendo do sistema linear, além das infinitas soluções que geramos acima (a partir de duas soluções conhecidas), podem ainda existir outras que não são do tipo $\gamma_j = t\alpha_j + (\mathbf{1} - t)\beta_j$ para todo índice j de 1 a n.

Observação. É possível demonstrar que se o número m de equações em um sistema linear for maior do que o número n de variáveis, ou seja, $m > n$, então pelo menos uma dessas equações é redundante e pode ser removida do sistema sem alterar seu conjunto-solução. Isso não quer dizer que possamos remover qualquer uma das equações; apenas quer dizer que existe uma delas que pode ser removida. Dessa forma, para simplificar as análises do restante desse módulo, vamos considerar aqui apenas sistemas em que o número de equações é menor ou igual ao de variáveis $(m \leq n)$.

Sistemas com duas variáveis

Conforme observamos nos módulos anteriores foram apresentados alguns métodos para resolver sistemas lineares (em especial, o *"método da substituição"* e o *"método da adição"*). Dependendo do sistema linear, pode ser mais simples aplicar um ou outro (ou um terceiro) desses métodos.

Neste módulo, centraremos nossa atenção apenas no chamado *"método da eliminação"*. A ideia geral dele é reduzir o número de variáveis em algumas das equações, a fim de obter um sistema equivalente ao inicial, mas mais simples de ser resolvido. Em sistemas lineares com duas variáveis, ele é essencialmente igual ao método da adição. A vantagem desse método é que, ao generalizá-lo para sistemas com um número maior de variáveis, ele ainda continua bastante prático de ser aplicado.

Como vimos no Exemplo, se nosso sistema linear de duas variáveis tiver apenas uma equação (e está com pelo menos um coeficiente não nulo), então ele será possível e indeterminado (possuirá infinitas soluções). Assim, pela **Observação**, vamos considerar agora apenas o caso em que temos duas variáveis e duas equações.

Os exemplos a seguir ilustram, para o caso de duas equações e duas variáveis, tanto a ideia central do método de eliminação quanto às possibilidades distintas para o conjunto-solução de um sistema linear.

Exemplo: Resolva o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 3x + 12y = 5 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$$

Solução. O objetivo é eliminar a variável x da segunda equação. Para isso, vamos primeiro simplificar a primeira equação, de modo que o coeficiente de x nela passe a ser igual a 1: basta dividir ambos os lados da equação por 3.

Obtemos, assim, o sistema equivalente:

$$\begin{cases} x + 4y = \frac{5}{3} \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$$

Agora, basta multiplicar a primeira equação por 2 (que é o coeficiente de x na segunda equação) e subtrair o resultado da segunda equação. Operando dessa forma, obtemos a equação:

$$2x + 3y - 2(x + 4y) = 7 - 2 \cdot \left(\frac{5}{3}\right).$$

Cancelando os termos em que x aparece e simplificando, obtemos

$$-5y = \frac{11}{3}$$

Essa equação irá substituir a segunda equação do nosso sistema original, que se transformará em:

$$\begin{cases} x + 4y = \frac{5}{3} \\ -5y = \frac{11}{3} \end{cases}$$

Uma vez feito isso, podemos resolver as equações do último sistema linear de baixo para cima, obtendo o valor de cada variável. Primeiramente, a segunda equação nos dá

$$y = -11/15;$$

então, substituindo este valor na primeira equação, obtemos:

$$x + 4\left(-\frac{11}{5}\right) = \frac{5}{3} \Rightarrow x = \frac{5}{3} + \frac{44}{5} = \frac{25 + 44}{15} = \frac{69}{15} = \frac{23}{5}$$

Assim, o sistema é possível e determinado, e sua única solução é

$$(x, y) = \left(\frac{23}{5}, -\frac{11}{15}\right)$$

Resolva o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x + 6y = 12 \end{cases}$$

Solução.

Neste caso, para eliminar a variável x da segunda equação, basta subtrair dela duas vezes a primeira equação.

Ao fazer isso, obtemos:

$$4x + 6y - 2 \cdot (2x + 3y) = 12 - 2 \cdot 5.$$

Acidentalmente, ao fazer isso acabamos eliminando também a variável y, uma vez que a equa¸c˜ao acima pode ser simplificada para

$$0x + 0y = 2.$$

Temos, então, o sistema equivalente:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 0x + 0y = 2 \end{cases}$$

Contudo, não existem x e y que satisfaçam a segunda equação deste sistema. Portanto este sistema não possui solução, ou seja, ele é impossível. Como o sistema original é equivalente a este, ele também é impossível.

O método da eliminação gaussiana (ou do escalonamento)

Agora que temos uma ideia intuitiva, dada pelos exemplos anteriores, de como o método da eliminação deve funcionar, vamos descrevê-lo mais formalmente. Na próxima seção, o utilizaremos para resolver sistemas de três variáveis.

O método da eliminação gaussiana, ou simplesmente eliminação, serve tanto para classificar o sistema como para determinar o seu conjunto solução. A ideia central é obter um sistema equivalente ao original, mas de resolução mais fácil.

Ele consiste de duas fases. Na fase de eliminação, o objetivo é empregar operações elementares ao sistema, a fim de obter o sistema equivalente, simplificado. Para isso, as operações elementares que iremos utilizar são as seguintes:

1. Multiplicar (ou dividir) uma equação por uma constante não nula.
2. Somar (ou subtrair) a uma equação um múltiplo de outra equação.
3. Trocar as posições de duas equações no sistema.

Estas operações podem ser aplicadas a qualquer sistema linear, sem que se altere os conjuntos-solução dos mesmos. A fase de eliminação consiste em aplicar estas operações de forma sistemática, numa ordem bem específica: escolhemos uma das variáveis da primeira equação e vamos eliminar tal variável de todas as outras equações; em seguida escolhemos uma variável que não foi eliminada da segunda equação e vamos eliminá-la de todas as equações abaixo dela (ou seja todas equações, exceto as duas primeiras); depois escolhemos uma variável da terceira equação e a eliminamos de todas as equações abaixo dela, e assim sucessivamente, enquanto existirem variáveis com coeficientes não nulos para as quais o passo de eliminação ainda não foi aplicado.

Na segunda fase, chamada de substituição retrocedida, o sistema simplificado é resolvido "de baixo para cima": começa-se resolvendo a última equação, cuja solução é substituída na penúltima, que após resolvida tem sua solução substituída na antepenúltima, e assim consecutivamente, até obter-se a solução final.

Sistemas com três variáveis

Conforme prometido anteriormente, vamos exemplificar o método da eliminação em alguns sistemas lineares com três variáveis, interpretando em seguida os possíveis resultados.

Exemplo. Resolva o seguinte sistema linear utilizando o método da eliminação gaussiana:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 8 \\ -x + y + 2z = 7 \\ x + 2y - 5z = -10 \end{cases}$$

Solução. Nosso primeiro objetivo será eliminar a variável x da segunda e da terceira equações. Para eliminar a variável x da segunda equação, vamos executar duas operações.

Primeiramente, multiplicamos a segunda equação por 2 e, em seguida, somamos a primeira equação ao resultado. (As demais equações permanecem inalteradas.)

Após a primeira operação, obtemos o sistema

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 8 \\ -2x + 2y + 4z = 14 \\ x + 2y - 5z = -10 \end{cases}$$

depois da segunda operação, o resultado é:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 8 \\ \quad - y + 8z = 22 \\ x + 2y - 5z = -10 \end{cases}$$

Analogamente, para eliminar x da terceira equação, vamos multiplicá-la por 2 e, dessa vez, vamos dela subtrair a primeira equação. Tendo feito essas duas operações, o sistema obtido é:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 8 \\ \quad - y + 8z = 22 \\ \quad +7y - 14z = -28 \end{cases}$$

Veja que, agora, a variável x está presente apenas na primeira equação, como queríamos. Nosso próximo objetivo é fazer com que a variável y esteja presente apenas na primeira e na segunda equações, ou seja, queremos eliminá-la da terceira equação. Para isso, basta olhar para os coeficientes de y na segunda e na terceira equações.

Começamos dividindo a terceira equação por 7, obtendo o sistema

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 8 \\ \quad - y + 8z = 22 \\ \quad + y - 2z = -4 \end{cases}$$

Em seguida, somamos a segunda equação à terceira, chegando a

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 8 \\ \quad - y + 8z = 22 \\ \qquad + 6z = 18 \end{cases}$$

Isso termina a fase da eliminação.

Agora, para encontrar a solução do sistema, podemos facilmente resolver as equações de baixo para cima. Da última equação, temos que

$$z = 3.$$

Em seguida, substituindo este valor na penúltima equação, vem que

$$-y + 8 \cdot 3 = 22 \Rightarrow y = 2.$$

Por fim, substituindo os valores de y e z na primeira equação, obtemos:

$$2x - 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 8 \Rightarrow 2x = 8 + 6 - 12 = 2 \Rightarrow x = 1.$$

A conclusão é que nosso sistema possui uma única solução:

$$(x, y, z) = (1, 2, 3).$$

Logo, ele é possível e determinado.

Durante o processo de eliminação gaussiana, obtivemos uma equação com todos os coeficientes iguais a zero mas termo independente diferente de zero,pelo que discutimos anteriormente e concluímos de imediato que o sistema é impossível.

Por outro lado, se tivermos uma equação em que todos os coeficientes e o termo independente são iguais a zero, a conclusão é que esta equação é automaticamente satisfeita. Neste caso, ela pode ser eliminada do sistema sem prejuízo algum.

No entanto, devemos continuar com o método de eliminação até o final, para decidir se o sistema como um todo é possível ou não. Como começamos com um sistema com número de equações menor ou igual ao de variáveis, restaram agora menos equações do que variáveis.

Neste caso pode-se demonstrar que, se conseguirmos encontrar uma solução, então o sistema será indeterminado; caso contrário, ele será impossível.

Regra de Cramer

É um dos métodos mais tradicionais para resolver sistemas de equações lineares. Ela apresenta a vantagem de fornecer explicitamente os valores das incógnitas como quocientes de dois determinantes. Mas, por outro lado, possui dois inconvenientes em comparação com o método de escalonamento. O primeiro é que ela só se aplica quando o determinante da matriz do sistema é diferente de zero, ou seja, quando o sistema possui uma única solução. O segundo inconveniente é o custo operacional: dá mais trabalho calcular quatro determinantes do que escalonar uma única matriz 3 × 3. Esse custo cresce espantosamente para sistemas n × n com n grande.

Consideremos, portanto, o sistema

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3, \end{aligned}$$

no qual supomos que a matriz m dos coeficientes tenha determinante diferente de zero. Como sabemos, esta hipótese equivale a admitir que as linhas de m são linearmente independentes e portanto que o sistema possui uma única solução. A regra de Cramer exprime essa solução por meio de determinantes.

Para deduzir a regra de Cramer, em vez de operar com as linhas da matriz, como vimos fazendo até agora, trabalharemos com os vetores coluna:

$$a = (a_1,a_2,a_3),\ b = (b_1,b_2,b_3),\ c = (c_1,c_2,c_3) \text{ e } d = (d_1,d_2,d_3).$$

Em termos desses vetores, as 3 equações numéricas que constituem o sistema dado se exprimem como uma única equação vetorial. Mais precisamente, elas dizem que o vetor d é uma combinação linear dos vetores a,b e c:

$$x - a + y - b + z - c = d.$$

Daí resulta, pelas propriedades 4, 3 e 2, que:

$$\begin{aligned} \det[d,b,c] &= \det[x - a + y - b + z - c,b,c] \\ &= x \det[a,b,c] + y \det[b,b,c] + z \det[c,b,c] \\ &= x \det[a,b,c], \end{aligned}$$

portanto

$$x = \frac{det[d,b,c]}{det[a,b,c]}$$

Analogamente, tem-se

$$\det[a,d,c] = y \det[a,b,c] \text{ e } \det[a,b,d] = z \det[a,b,c],$$

logo

$$y = \frac{det[a,d,c]}{det[a,b,c]},\ z = \frac{det[a,b,d]}{det[a,b,c]}$$

Estas três fórmulas, que fornecem os valores das incógnitas x,y,z em termos de determinantes, constituem a regra de Cramer.

Observação 1: A regra de Cramer só se aplica quando a matriz dos coeficientes do sistema tem determinante diferente de zero. Tentar utilizá-la fora desse caso pode conduzir a erros. Um desses erros é o seguinte: quando os 4 determinantes que aparecem na regra são todos iguais a zero, poder-se-ia pensar que ela fornece x = 0/0, y = 0/0, z = 0/0 e concluir que o sistema é indeterminado, isto é, possui infinitas soluções. Mas não é bem assim. Suponhamos, por exemplo, que os três vetores-coluna a,b,c sejam múltiplos um do outro mas que o vetor d não seja múltiplo deles. Então os quatro determinantes são nulos mas não existem números x,y,z tais que x − a + y − b + z − c = d, isto é, o sistema não tem solução.

Exemplo. Consideremos o sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \\ 3x + 3y + 3z = 4 \end{cases}$$

É claro que este sistema não tem solução pois se $x + y + z = 1$ então $3x + 3y + 3z$ deve ser igual a 3 e não 4. Apesar disso, a regra de Cramer (usada incorretamente, pois foi deduzida mediante a hipótese de que det[a,b,c] = 0) nos levaria às "expressões indeterminadas" $x = 0/0$, $y = 0/0$, $z = 0/0$ e à falsa conclusão de que o sistema é indeterminado.

Observação 2: Resulta da fórmula det[d,b,c] = x det[a,b,c] e suas análogas para y e z que, se det[a,b,c] = 0 e algum dos determinantes det[d,b,c], det[a,d,c] ou det[a,b,d] for = 0, ent˜ao o sistema é impossível.

Observação 3: Vimos que há duas interpretações "duais" para um sistema de 3 equações a 3 incógnitas. Se olhamos para as linhas, podemos vê-lo como três planos no espaço e as soluções são os pontos comuns a esses planos. Se olharmos para as colunas, ve-lo-emos como um vetor d, que se procura exprimir como combinação linear de três vetores dados a,b,c. Neste caso, as soluções do sistema serão os coeficientes x,y,z da combinação linear d = x − a + y − b + z − c.

Poder-se-ia pensar que o tratamento segundo linhas, é o único geométrico pois lida com planos no espaço, enquanto o tratamento segundo colunas é algébrico, pois cuida de combinações lineares. Entretanto, olhando para as colunas vê-se facilmente que, se os vetores a,b,c são coplanares, o sistema não admite solução a menos que o vetor *d* esteja nesse plano. Isto é uma conclusão geométrica.

Assim, ao analisar um sistema linear, é vantajoso não ter espírito preconcebido, encarando-o sob vários aspectos: linhas, colunas, interseção de planos, combinações lineares e determinantes. A confluência dessas várias interpretações ilustra muito bem a riqueza de um assunto, aparentemente elementar, porém de grande utilidade na Matemática e em suas aplicações.

Exemplo. Resolver o sistema

$$\begin{array}{r} x + y + 2z = 1 \\ 2x + 3y + 3z = 2 \\ 4x + 4y + 5z = 3 \end{array}$$

usando a regra de Cramer. As colunas são a = (1,2,4), b = (1,3,4), c = (2,3,5) e d = (1,2,3).

Temos det[a,b,c] = −3, det[d,b,c] = 0, det[a,d,c] = −1 e det[a,b,d] = −1.
Portanto $x = 0$, $y = 1/3$ e $z = 1/3$.

ATIVIDADES

1. O par (5,3) é solução da equação:

$2x+4y=22$.

2. Encontre duas soluções de equação $-x1+x2 = 0$.

a) $x1=-4$

b) $x1=2$

3. Seja o sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x - 2y + z = 5 \\ -x + y + z = -2 \end{cases}$$

a) Verifique se (2, -1, 1) é a solução do sistema.

b) Verifique se (0, 0, 0) é a solução do sistema.

4. Expresse matricialmente os sistemas:

a) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2a + b + c = -1 \\ a + c = 0 \\ -3a + 5b - c = 2 \end{cases}$

REFERÊNCIAS

ASSIS, Willian Christian de, Tabuleiro de xadrez. Belo Horizonte, 2023.

GIOVANNI, J.R.; Bonjorno, J.R.; Jr Giovanni, J.R. Matemática Fundamental: 2º Grau - Volume Único - São Paulo: FTD, 1994.

IEZZI, G. & Hazzan, S. Fundamentos de Matemática Elementar 4: Sequências, Matrizes, Determinantes e Sistemas. 2ª ed.- São Paulo: Atual Editora, 1977.

LIMA, Elon L. Geometria analítica e álgebra linear / Elon Lages Lima. 1.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

MINAS GERAIS. Secretaria do Estado de Educação. Plano de Curso: ensino médio. Escola de Formação e Desenvolvimento Profissional de Educadores de Minas Gerais, [s. l.], 2024. Disponível em: https://curriculoreferencia.educacao.mg.gov.br/index.php/plano-de-cursos-crmg. Acesso em: 28 out 2023.

MINAS GERAIS. Secretaria do Estado de Educação. Currículo Referência de Minas Gerais: Ensino Médio. Escola de Formação e Desenvolvimento Profissional de Educadores de Minas Gerais, [s. l.], 2023. Disponível em: https://www2.educacao.mg.gov.br/images/documentos/Curr%C3%ADculo%20Refer%C3%AAncia%20do%20Ensino%20M%C3%A9dio.pdf. Acesso em: 28 out 2023.

SOUZA, Joamir Roberto de; Multiversos Matemática: Matemática Financeira, Gráficos e Sistemas. Volume 4. Ensino Médio – 1° ed. – São Paulo: Editora FTD, 2020.

GIOVANNI, J.R.; Bonjorno, J.R.; Jr Giovanni, J.R. Matemática Fundamental: 2º Grau - Volume Único - São Paulo: FTD, 1994.

IEZZI, G. & Hazzan, S. Fundamentos de Matemática Elementar 4: Sequências, Matrizes, Determinantes e Sistemas. 2ª ed.- São Paulo: Atual Editora, 1977.

LIMA, Elon L. Geometria analítica e álgebra linear / Elon Lages Lima. 1.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

MINAS GERAIS. Secretaria do Estado de Educação. Plano de Curso: ensino médio. Escola de Formação e Desenvolvimento Profissional de Educadores de Minas Gerais, [s. l.], 2024. Disponível em: https://curriculoreferencia.educacao.mg.gov.br/index.php/plano-de-cursos-crmg. Acesso em: 28 out 2023.

MINAS GERAIS. Secretaria do Estado de Educação. Currículo Referência de Minas Gerais: Ensino Médio. Escola de Formação e Desenvolvimento Profissional de Educadores de Minas Gerais, [s. l.], 2023. Disponível em: https://www2.educacao.mg.gov.br/images/documentos/Curr%C3%ADculo%20Refer%C3%AAncia%20do%20Ensino%20M%C3%A9dio.pdf. Acesso em: 28 out 2023.

SOUZA, Joamir Roberto de; Multiversos Matemática: Matemática Financeira, Gráficos e Sistemas. Volume 4. Ensino Médio – 1° ed. – São Paulo: Editora FTD, 2020.

MATERIAL DE
APOIO PEDAGÓGICO
PARA APRENDIZAGENS
MAPA 2024

MATERIAL PARA O ESTUDANTE

Olá, estudantes!

Convidamos você a conhecer e utilizar os Cadernos MAPA. Esse material foi elaborado com todo carinho para que vocês possam realizar atividades interessantes e desafiadoras na sala de aula ou em casa. As atividades propostas estimulam as competências como: organização, empatia, foco, interesse artístico, imaginação criativa, entre outras, para que possam seguir aprendendo e atuando como estudantes protagonistas que são. Significa proporcionar uma base sólida para que vocês mobilizem, articulem e coloquem em prática conhecimentos, valores, atitudes e habilidades importantes na relação com os outros e consigo mesmo(a), para o enfrentamento de desafios, de maneira criativa e construtiva. Ficou curioso(a) para saber que convite é esse que estamos fazendo para você? Então não perca tempo e comece agora mesmo a realizar essa aventura pedagógica pelas atividades.

Bons estudos!

MATRIZ

CONTEXTUALIZAÇÃO E ABERTURA

Caro estudante, temos algumas atividades práticas desenvolvidas para que possam resolver em seus cadernos e também realizar uma prática de atividades no laboratório de informática com o uso do Geogebra para que criem suas próprias matrizes e possam visualizar como realizamos as operações no Geogebra.

Os estudos relacionados a matrizes e determinantes segundo Souza, (2020) têm suas origens datadas desde o século II a.C., com registros dos babilônios solucionando sistemas lineares de duas variáveis, encontrados em tabletes de argila. O texto "Nove Capítulos da Arte Matemática" dos chineses é um dos primeiros exemplos documentados com matrizes, fornecendo significativas contribuições nesse sentido. Embora essa jornada tenha começado na antiguidade, a verdadeira compreensão e avanços significativos surgiram no século XIX, um período marcado por notáveis avanços matemáticos.

A teoria dos determinantes surgiu quase simultaneamente na Alemanha e no Japão. Foi desenvolvida por dois matemáticos, Leibniz (1646-1716) e Seki Shinsuke Kowa(1642-1708), ao solucionarem um problema de eliminações necessárias à resolução de um sistema de *m* equações lineares com *m* incognitas.

A importância das matrizes na Matemática e no cotidiano humano é vasta, permeando áreas como Economia, Engenharia, Física, Biologia e Computação. Um exemplo concreto são os pixels em telas de computador, onde uma tela de 640 x 480 pixels é composta por uma matriz de 307.200 pontos, representando a área da tela. Cada ponto possui um endereço na matriz, indicado por um par (a,b) onde 'a' é a linha e 'b' a coluna, e armazena a informação de cor. Esse conceito se estende para telas de televisores, onde cada pixel pode conter um valor de zero a 255, representando 256 cores possíveis.

Dando continuidade

Matriz e suas propriedades

A matriz **m×n** é uma tabela retangular ou quadrada com **m · n** elementos dispostos em **m** linhas e **n** colunas, com a quantidade de elementos **m , n**

≥ **1.** Dessa forma, o número de linhas é primeiro e depois o número de colunas. A matriz é uma tabela cujos elementos são os números escolhidos a partir de um conjunto numérico dos números reais.

Veja um exemplo:

A tabela indica o número de vendas efetuadas por uma concessionária de veículos durante o primeiro trimestre.

Tabela 1: Veículos/modelos vendidos por mês

Matriz	1ª coluna	2ª coluna	3ª coluna	4ª coluna
m x n	Veículos/mês	Janeiro	Fevereiro	Março
1ª linha	Honda City	20	18	25
2ª linha	Fiat Pulse	12	10	15
3ª linha	VW Polo	15	9	20
4ª linha	Hyundai Creta	18	15	21

Fonte: (Assis, 2023)

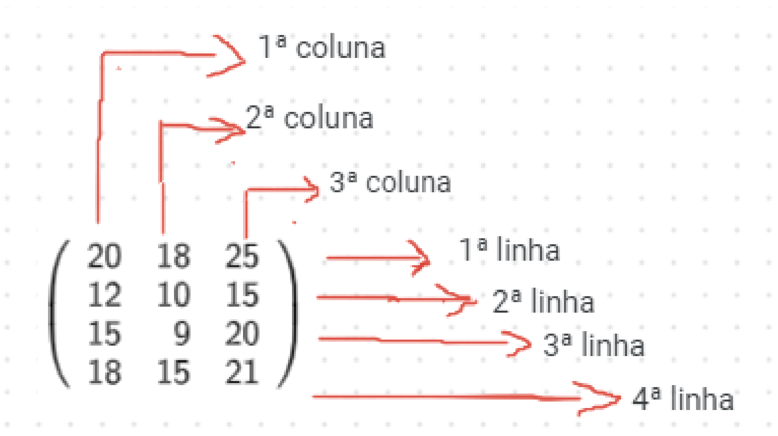
Se quisermos saber a quantidade de carros VW Polo vendidos em janeiro, iremos procurar o número na terceira linha e na primeira coluna da tabela.

Portanto, no quadro apresentado, os números colocados nas disposições horizontais (**m**) formam o que determinamos **linhas** e os colocados nas disposições verticais(**n**) chamamos de **coluna.** O conjunto ordenado dos números formam a tabela e é denominado **matriz** e cada número é chamado **elemento** da matriz.

Nesse exemplo acima, temos uma matriz do tipo 4 x 3(Lê-se: quatro por três), isto é, uma matriz formada por 4 linhas e três colunas.

Representa-se uma matriz colocando-se seus elementos entre parênteses ou colchetes.

Matriz 4 x 3



Fonte: (Assis, 2023)

Uma matriz A de ordem *m x n* pode ser representada genericamente por A = $(a_{ij})_{m\,x\,n}$ e expressa da maneira apresentada ao lado.

Nessa matriz a_{ij} indica o elemento que está na linha *i* e coluna *j.* O elemento a_{13}(lê-se " a um tres"), por exemplo, tem *i = 1 e j = 3,* ou seja, ele está localizado na primeira linha e na terceira coluna.

Matriz Genérica

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Fonte: (Assis, 2023)

Exemplos de matrizes:

Matriz 1 x 2:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriz 2 x 1

$$B = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Matriz 2 x 3

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 11 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

Matriz 2 x 2

$$D = \begin{pmatrix} 20 & 40 \\ 30 & 50 \end{pmatrix}$$

Matriz 3 x 3

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Matriz 4 x 4

$$F = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 & 40 \\ 100 & 200 & 300 & 400 \\ 1000 & 2000 & 3000 & 4000 \\ 10000 & 20000 & 30000 & 40000 \end{pmatrix}$$

Denominamos **Matriz Quadrada** toda matriz de ordem *m x n*, em que *m = n*, ou seja, as quantidades de linhas e de colunas são iguais. Nesse caso, podemos dizer que a matriz é de ordem n. Em uma matriz quadrada A = $(a_{ij})_n$, os elementos a_{ij} em que *i = j* formam a **diagonal principal da matriz.**

Igualdade de matrizes

Duas matriz A e B, de mesma ordem, são iguais quando cada elemento de A é igual ao correspondente (mesma posição) em B. Assim indicamos: *A=B.*

Para indicar que duas matrizes A e B são diferentes, ou seja, não tem a mesma ordem. ou não tem todos os elementos correspondentes iguais, escrevemos: *A ≠ B.*

Observe alguns exemplos:

1º Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -1 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$ e $$B = \begin{pmatrix} 2.4 & 10-5 \\ -2+1 & 8-4 \\ 2.3 & \frac{14}{2} \end{pmatrix}$$

As matrizes têm a mesma ordem e os elementos correspondentes são iguais. Portanto, A=*B*.

2º Exemplo:

$C = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 11 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix}$

Os elementos das matrizes C e D, não tem a mesma ordem. Portanto, $C \neq D$.

3º Exemplo:

$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ e $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

As matrizes E e F têm a mesma ordem, porém os elementos $e_{21} \neq f_{21}$ são diferentes. Portanto $E \neq F$

Algumas matrizes recebem nomenclaturas especiais de acordo com as suas características, sendo elas:

- Matriz linha:
  Toda matriz de ordem $1 \times n$.

- Matriz coluna:
  Toda matriz de ordem $m \times 1$.

- Matriz diagonal:
  Toda matriz quadrada em que $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

- Matriz nula:
  Toda matriz m xn em que $a_{ij} = 0$ para quaisquer que sejam i e j. Indicamos a matriz nula de ordem $m \times n$ por $0_{m\,x\,n}$.

- Matriz identidade:
  Toda matriz quadrada em que $a_{ij} = 1$ para que $i = j$ e $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Indicamos a matriz identidade de ordem n por I_n.

Operações com matriz:

Soma de matriz.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

Produto de um número pela matriz.

$$2.\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 & 2.6 \\ 2.7 & 2.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 14 & 16 \end{pmatrix}$$

Produto de uma matriz.

A grande novidade operacional entre matrizes é a multiplicação, sobre a qual falaremos a seguir.

Em Álgebra Linear, as matrizes surgem principalmente associadas a transformações lineares e o produto de duas matrizes é naturalmente definido como a matriz associada à composta de duas transformações lineares.

Por exemplo, sejam A, C: R² → R² transformações lineares dadas por

$A_{(x,y)}$ = (a_1x + b_1y, a_2x + b_2y)
$C_{(x,y)}$ = (c_1x + d_1y, c_2x + d_2y),

para todo v = (x, y) ∈ R².

As matrizes dessas transformações são, respectivamente,

$$a = \begin{pmatrix} a1 & b1 \\ a2 & b2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad c = \begin{pmatrix} c1 & d1 \\ c2 & d2 \end{pmatrix}$$

A transformação linear AC: R²→ R², chamada a composta de A e C (ou o produto de A por C) é definida pondo-se

(AC)v = A(Cv),

para todo v = (x, y) ∈ R². Assim, o transformado do vetor v pela transformação AC é o transformado do vetor Cv por A.

Vejamos qual é a matriz da composta AC. Para v = (x, y), temos:

(AC)v = A(C(x, y)) = A(c_1x + d_1y, c_2 + d_2y)
= (a_1(c_1x + d_1y) + b_1(c_2x +d_2y), a_2(c_1x + d_1y) + b_2(c_2x + d_2y))
= ((a_1c_1+b_1c_2)x + (a_1d_1+b_1d_2)y, (a_2c_1+b_2c_2)x + (a_2d_1+b_2d_2)y).

Logo a matriz de AC é

$$m = \begin{bmatrix} a_1c_1 + b_1c_2. & a_1d_1 + b_1d_1 \\ a_2c_1 + b_2c_2. & a_2d_1 + b_2d_2 \end{bmatrix}$$

Esta matriz é chamada de produto das matrizes ***a*** *e* ***c***. Escreve-se ***m = ac***.

Observe que os elementos da matriz ac são obtidos tomando os produtos internos dos vetores-linha de a pelos vetores-coluna de c ordenadamente. Assim, por exemplo, o elemento de ac que está na segunda linha e primeira coluna é a_2,c_1+b_2,c_2, produto interno do vetor (a_2, b_2), segunda linha de a, pelo vetor (c_1, c_2), primeira coluna de c.

Exemplo: Sejam $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 1 \end{bmatrix}$. Encontre o valor de A × B.

Como A = A_{3x2} e B_{2x3}, o resultado é uma matriz 3 × 3, conforme calculado abaixo:

$$\begin{bmatrix} 1\cdot 4+(-1)\cdot 4 & 1\cdot 2+(-1)(-5) & 1\cdot 3+(-1)\cdot 1 \\ 2\cdot 4+2\cdot 4 & 2\cdot 2+2\cdot(-5) & 2\cdot 3+2\cdot 1 \\ 3\cdot 4+4\cdot 4 & 3\cdot 2+4\cdot(-5) & 3\cdot 3+4\cdot 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 7 & 2 \\ 16 & -6 & 8 \\ 28 & -14 & 13 \end{bmatrix}.$$

Determinante é um número real que se associa a uma matriz quadrada.

Determinante de uma matriz quadrada de 2ª ordem.

Dada a matriz quadrada de 2ª ordem

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{bmatrix}$$

Chama-se determinante associado à matriz A (ou determinante de 2ª ordem) e o número real obtido pela diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal pelo dos elementos da diagonal secundária.

Então, determinante de A.

Diagonal Principal — Diagonal secundária

$$A = (a_{11}.a_{22}) - (a_{12}.a_{21})$$

indica-se: $det\ A = |A| = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$

Exemplo 1:

Achar o valor do determinante $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ = 1.4 - 2.3 = 4 - 5 = -1

Resposta: -1

Exemplo 2:

Resolva a equação $\begin{pmatrix} x+3 & 2 \\ x-1 & 5 \end{pmatrix}$ = 0.

Resolução:

$\begin{pmatrix} x+3 & 2 \\ x-1 & 5 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{5}(x+\boldsymbol{3}) - \boldsymbol{2}(x-\boldsymbol{1}) = \boldsymbol{0}$

$\Rightarrow$ **5**x **+ 15 - 2**x **+ 2 = 0**

$\Rightarrow$ **3**x **= -17**

$\Rightarrow x = -\frac{17}{3}$

$S = \left\{-\frac{17}{3}\right\}$

Determinante de uma matriz de 3ª ordem.

Método: ***- Pelo Teorema de Laplace:*** O determinante de uma matriz de 3ª ordem, é igual à soma dos produtos dos elementos de uma linha ou coluna qualquer pelos respectivos cofatores.

$$\text{Det A} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

Consideramos a matriz quadrada de 3ª ordem:

$$A = \begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a23 & a33 \end{pmatrix}$$

Define-se como determinante da matriz A o número:

$$\det A = \begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a23 & a33 \end{pmatrix}$$

det A = $a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$

Agrupando-se os termos que têm a_{11},a_{12} e a_{13}, isto é, os elementos da 1ª linha e colocando-os em evidência, vem:

det A = $a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$

det A = $a_{11}.(a_{22}.a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) - a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$, em que:

det A = $a_{11}. \begin{pmatrix} a22 & a23 \\ a32 & a33 \end{pmatrix} - a_{12}. \begin{pmatrix} a21 & a23 \\ a31 & a33 \end{pmatrix} - a_{13}. \begin{pmatrix} a21 & a22 \\ a31 & a32 \end{pmatrix}$, em que:

$\begin{pmatrix} a22 & a23 \\ a32 & a33 \end{pmatrix}$ = A_{11} é o cofator de a_{11}.

$-\begin{pmatrix} a21 & a23 \\ a31 & a33 \end{pmatrix}$ = A_{12} é o cofator de a_{12}.

$\begin{pmatrix} a21 & a22 \\ a31 & a32 \end{pmatrix}$ = A_{13} é o cofator de a_{13}.

Logo: **Det A =** $a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$

Exemplo: calcular o determinante da matriz A, sendo $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Calcularemos o det A de duas formas:

a) Pelos elementos da 1ª linha: det A = $a_{11}A_{11}$+ $a_{12}A_{12}$+ $a_{13}A_{13}$.

A_{11}= $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ =14 A_{12}= $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$ =+30 A_{13}= $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ =-24

det A = 2(14) + (-1)(30) + 3(-24) ⇒ det A= 28-30-72 ⇒ **det A = -74**

b) Pelos elementos da 1ª coluna: det A **=** = $a_{11}A_{11}$+ $a_{21}A_{21}$+ $a_{31}A_{31}$.

A_{11}= 14 $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ A_{21}= = - 5 $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ A_{31}= = - 17

det A = 2(14) + 0(-5) + 6(-17) ⇒ det A= 28 + 0 - 102 ⇒ **det A = -74**

Observe que para se aplicar esse método é melhor escolher a linha ou a coluna que tiver o maior número de **zeros**.

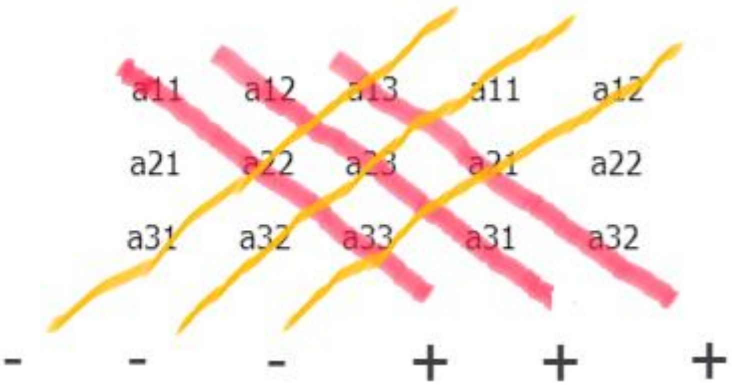
Regra de Sarrus

Podemos obter o determinante de uma matriz quadrada de 3ª ordem utilizando uma regra pratica muito simples denominada **regra de Sarrus.**

Seja a Matriz

$$A = \begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a23 & a33 \end{pmatrix}$$

Vamos repetir a 1ª e a 2ª colunas à direita da matriz, conforme o esquema abaixo:

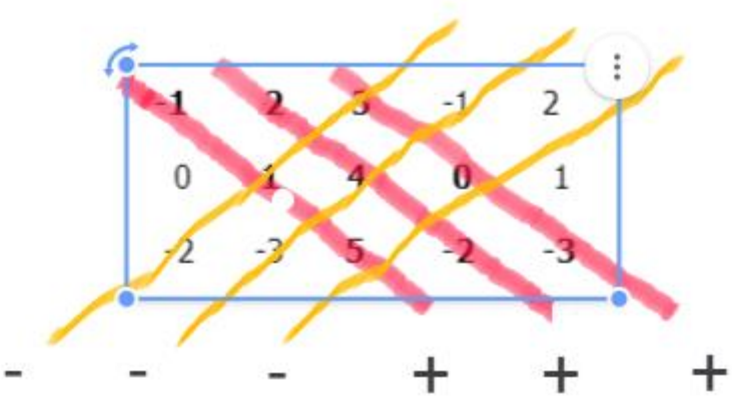


Multiplicando os termos entre si, seguindo os traços em diagonal e associando aos produtos o sinal indicado, temos:

det A = $a_{11}.a_{22}.a_{33}$ **+** $a_{12}a_{23}a_{31}$ **+** $a_{13}a_{21}a_{32}$ **-** $a_{13}a_{22}a_{31}$ **-** $a_{12}a_{21}a_{33}$ **-** $a_{11}a_{23}a_{32}$

Exemplo: Calcular o determinante da matriz A, sendo

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$



det A = (-1)(1)(5) + (2)(4)(-2) + (3)(0)(-3) - (-2)(1)(3) - (-3)(4)(-1) - (5)(0)(2)

det A = -5 - 16 + 0 + 6 - 12 - 0

det A = - 27

Observação: Determinante de uma matriz quadrada de ordem n > 3. Para o cálculo desse determinante, aplicaremos o teorema de Laplace, até chegarmos a um determinante de 3ª ordem, e depois empregaremos a regra de Sarrus.

Det A = $a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$

Agora, faça estes exercícios para fixar o conhecimento, buscando uma aprendizagem significativa.

ATIVIDADES

1 – Em cada item, escreva a matriz conforme a lei de sua formação de seus elementos:

A) A = $(a_{ij})_{2x\,4}$ $tal\ que\ \ a_{ij} = 2i\ + j$

B) B=$(b_{ij})_{2x\,2}$ $tal\ que\ \ b_{ij} = \{i + j^2 se\ i\ \geq j; \quad ou\ \{\, j - 3i, se\ i\ < j$

2 – Dada a matriz B = b_{ij} de ordem 4 x 3, em que b_{ij} = i - j², calcule o elemento b_{41}.

3 – Observe a matriz e responda:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 11 \\ 2 & 1 & 2 & 12 \\ 3 & 6 & 3 & 13 \\ 4 & 8 & 0 & 14 \\ 5 & 9 & 5 & 15 \end{pmatrix}$$

A) Qual é a ordem de A?
B) Escreva o elemento a_{52}.
C) Escreva a sua transposta [1].
D) Para que valores de i tem-se a_{ij}= 0?

---

[1] Matriz transposta: Se A é uma matriz de ordem m x n, denominamos a **transposta** de A a matriz de ordem n x m obtida pela troca de ordenada das linhas pelas colunas. Indica transposta de A por A^t.

4 – Calcule x e y, sabendo que $\begin{pmatrix} 2x + 3y \\ 3x - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 16 \end{pmatrix}$..

5 – Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$, calcule:

A) A+B
B) A+C
C) B+C+A
D) A-B
E) A- B^t - C
F) Calcule o determinante de A, B e C.

6 – Calcule os determinantes das matrizes dadas:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$F : \begin{pmatrix} x+3 & 2 & 1 \\ x-1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 0$$

Observação: o determinante de F é zero (0).

A) Determine pelo método do Teorema de Laplace:
B) Determine pelo método Regra de Sarrus.

7 – Calcule a multiplicação de um número real por uma matriz e calcule o determinante de cada matriz:

a) $5.\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

b) $-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 10 & -8 \\ 20 & 6 & -6 \\ -2 & 0 & 20 \end{pmatrix}$

8 – Efetuar as multiplicações e calcular o determinante:

a) $\begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

SISTEMATIZANDO

Caro estudante, temos algumas atividades práticas desenvolvidas para possam resolver em seus cadernos e também realizar uma prática de atividades no laboratório de informática com o uso do Geogebra para que criem suas próprias matrizes e possam visualizar como realizamos as operações no Geogebra.

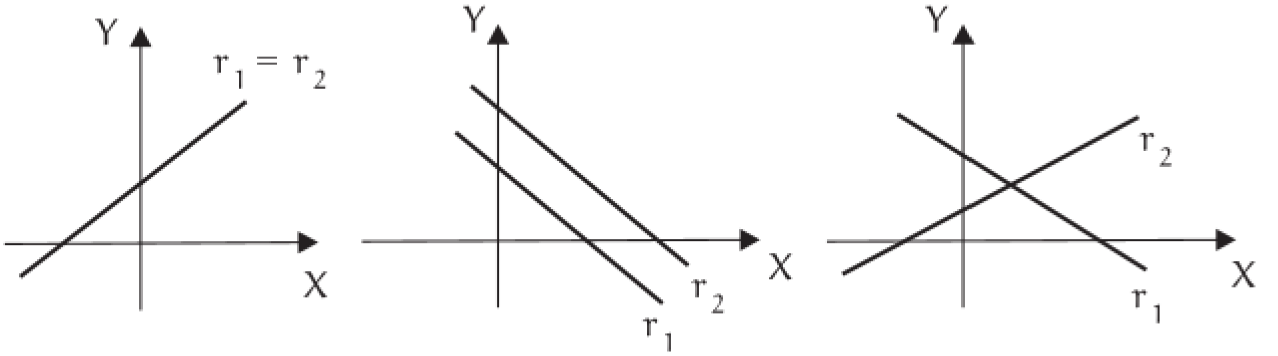
Vamos trabalhar com sistemas de equações lineares.

Uma solução do sistema linear

$$\begin{aligned} a1x + b1y &= c1 \\ a2x + b2y &= c2 \end{aligned} \qquad (*)$$

é um par (x,y) ∈ R^2 cujas coordenadas x,y satisfazem ambas equações. O sistema (*) se diz indeterminado, impossível ou determinado quando admite mais de uma solução, nenhuma solução ou uma única solução respectivamente. Como sabemos, cada equação em (*) tem como soluções as coordenadas (x,y) dos pontos de uma reta, de modo que o sistema é indeterminado, impossível ou determinado, conforme as retas r1 e r2, representadas pelas duas equações, coincidam, sejam paralelas ou sejam concorrentes respectivamente.

Figura 1: Sistemas com duas incógnitas: indeterminado, impossível e determinado. Gráficos das retas.



Fonte: (Elon Lages, 2014)

Para decidir em qual dessas três alternativas se enquadra o sistema (*), devemos examinar os quadros dos coeficientes

$$m = \begin{pmatrix} a1 & b1 \\ a2 & b2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad M = \begin{pmatrix} a1 & b1 & c1 \\ a2 & b2 & c2 \end{pmatrix}$$

Eles são exemplos de matrizes: *m* é uma matriz quadrada, com duas linhas e duas colunas, ou seja, uma matriz 2 × 2. Suas linhas são os vetores l1 = (a1,b1) e l2 = (a2,b2), e suas colunas são os vetores v = (a1,a2), w = (b1,b2), todos em R^2.

Duas retas que possuem mais de um ponto em comum devem coincidir. Logo o sistema (*) é indeterminado se, e somente se, suas equações definem a mesma reta.

O número a1.b2 − b1.a2 chama-se o determinante da $m = \begin{pmatrix} a1 & b1 \\ a2 & b2 \end{pmatrix}$ matriz

do sistema.

Finalmente, o sistema (*) é *determinado* quando não é *indeterminado nem impossível*. Isto ocorre quando as retas a1x + b1y = c1 e a2x +b2y = c2 são *concorrentes*, ou seja, quando o determinante a1.b2 − a2.b1 é diferente de zero. Dito de outro modo: quando os vetores-linha ℓ1 = (a1, b1) e ℓ2 = (a2, b2) da matriz m não são múltiplos um do outro. Diz-se que um vetor w é combinação linear dos vetores u e v quando existem números x,y tais que w = xu + yv.

O sistema (*), que foi analisado acima sob o ponto de vista de suas linhas, pode também ser olhado em termos das colunas u = (a1, a2), v = (b1, b2), w = (c1, c2) de sua matriz aumentada. Sob este ângulo, afirmar que (x,y) é uma solução do sistema equivale a dizer que w = xu + yv. Portanto, o sistema possui solução se, e somente se, w é combinação linear dos vetores u e v.

Resulta, então, da discussão acima que se esses vetores u = (a1, a2) e v = (b1, b2) são tais que a

a1b2 − a2b1 ≠ 0 então qualquer vetor w = (c1, c2) em R² se exprime (de modo único) como combinação linear deles. Neste caso (isto é, quando u e v não são múltiplos um do outro) diz-se que os vetores u e v são *linearmente independentes*.

Dois sistemas dizem-se equivalentes quando admitem as mesmas soluções. Quando se substitui uma das equações do sistema pela soma desta equação com um múltiplo da outra, obtém-se um sistema equivalente. Noutras palavras, para todo k ∈ R, os dois sistemas abaixo possuem as mesmas soluções:

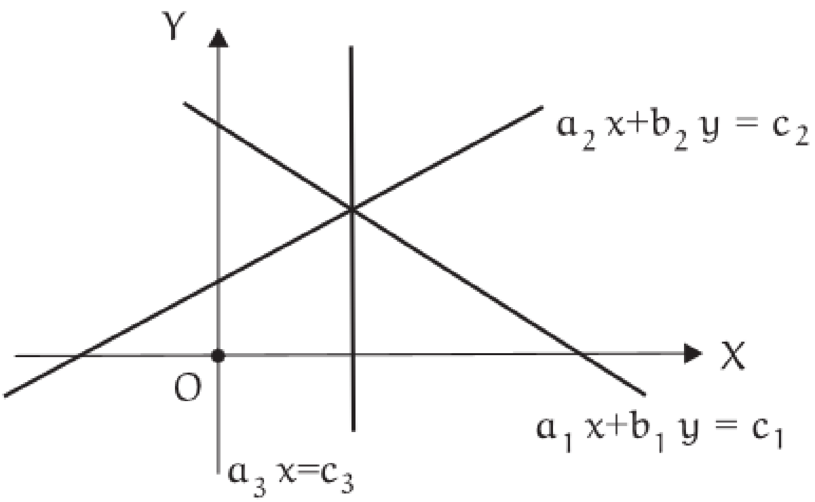
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1x + b_1y & = c_1 \\ (a_2 + ka_1)x + (b_2 + kb_1)y & = c_2 + kc_1. \end{cases}$$

Para resolver o sistema pelo *método da eliminação*, escolhe-se o número k de modo que um dos coeficientes a2 + ka1 ou b2 + kb1 seja *zero*. Isto dá imediatamente o valor de uma das incógnitas, o qual é substituído na primeira equação para encontrar o outro valor.

Sob o ponto de vista geométrico, quando a1b2 − a2b1 = 0 as retas a1x + b1y = c1 e a2x + b2y = c2 se cortam num certo ponto (x0, y0).

Para qualquer número k, pondo a3 = a1 + ka2 , b3 = b1 + kb2 e c3 = c1 + kc2 , a reta a3x + b3y = c3 ainda passa pelo ponto (x0 ,y0). Escolher k de modo a anular um dos coeficientes a3 ou b3 equivale a obter a reta a3x + b3y = c3 horizontal ou vertical, o que permite determinar imediatamente uma das coordenadas x0 ou y0 .

Figura 2. Método de eliminação visto geometricamente.



Fonte: (Elon Lages, 2014)

ATIVIDADES

1 – Resolva o seguinte sistema linear utilizando o método da eliminação gaussiana:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 8 \\ -x + y + 2z = 7 \\ x + 2y - 5z = -10 \end{cases}$$

2 – Resolva o sistema.

$$\begin{cases} 5x - 2y + 3z = 2 \\ 3x + y + 4z = -1 \\ 4x - 3y + z = 3 \end{cases}$$

3 – Uma liga L_1 contém 30% de ouro e 70% de prata e uma liga L_2 tem 60% de ouro e 40% de prata. Quantos gramas de cada uma deve-se tomar a fim de formar 100 gramas de uma liga com igual quantidade de ouro e prata?

	L_1	L_2	L_3
ouro	30%	40%	80%
prata	70%	60%	20%

4 – O sistema

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 4y - 2z = 6 \\ 3x + 6y + z = 9 \end{cases}$$

apresenta $L_1 = L_2$ mas $L_3 = (3, 6, 1)$ não é múltiplo de $L_1 = (1, 2, -1)$, logo a interseção $L_3 \cap L_1$ é a reta r, formada pelos pontos $P = (x, y, z)$ cujas coordenadas são as soluções do sistema

$$\begin{matrix} x + 2y - z = 3 \\ 3x + 6y + z = 9 \end{matrix} \quad \text{ou} \quad \begin{matrix} 2y - z = 3 - x \\ 6y + z = 9 - 3x \end{matrix}$$

5- Escreva duas soluções diferentes para as equações lineares indicadas em cada item, e em seguida represente graficamente todas as soluções.

A) $2x + y = 1$.
B) $2y - x = -1$.
C) $3x + 4y = 6$.

6- Luan foi a um terminal de caixa eletrônico sacar 100,00 reais. A tela desse terminal indicava disponibilidade apenas de cédulas de R$50,00, R$20,00 e R$10,00 para Saque.

A) Escreva uma equação linear que expressa a quantidade de m, n e p de cédulas nesse terminal que Luan pode sacar?
B) Indique uma solução de equação que você escreveu no item anterior e faça interpretação dela em relação a situação-problema apresentada.
C) De quantas maneiras distintas Luan pode receber as cédulas nesse saque? Explique os procedimentos que você utilizou para resolver essa questão.

REFERÊNCIAS

GIOVANNI, J.R.; Bonjorno, J.R.; Jr Giovanni, J.R. **Matemática Fundamental**: 2º Grau - Volume Único - São Paulo: FTD, 1994.

IEZZI, G. & Hazzan, S. **Fundamentos de Matemática Elementar 4:** Sequências, Matrizes, Determinantes e Sistemas. 2ª ed.- São Paulo: Atual Editora, 1977.

LIMA, Elon L. Geometria analítica e álgebra linear / Elon Lages Lima. 1.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

MINAS GERAIS. Secretaria do Estado de Educação. **Currículo Referência de Minas Gerais**: Ensino Médio. Escola de Formação e Desenvolvimento Profissional de Educadores de Minas Gerais, [s. l.], 2023. Disponível em: https://www2.educacao.mg.gov.br/images/documentos/Curr%C3%ADculo%20Refer%C3%AAncia%20do%20Ensino%20M%C3%A9dio.pdf. Acesso em: 28 out 2023.

MINAS GERAIS. Secretaria do Estado de Educação. **Plano de Curso:** ensino médio. Escola de Formação e Desenvolvimento Profissional de Educadores de Minas Gerais, [s. l.], 2024. Disponível em: https://curriculoreferencia.educacao.mg.gov.br/index.php/plano-de-cursos-crmg. Acesso em: 28 out 2023.

SOUZA, Joamir Roberto de; **Multiversos Matemática:** Matemática Financeira, Gráficos e Sistemas. Volume 4. Ensino Médio – 1° ed. – São Paulo: Editora FTD, 2020.