WG 13 Mathe Datum ....

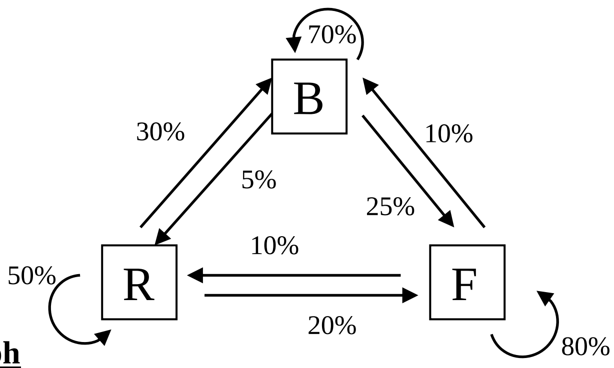
Stochastische Matrizen

Übergangsprozesse, die mit bestimmten Wahrscheinlichkeiten stattfinden werden verschieden dargestellt.

Darstellungsarten:

Text.
Eine Kleinstadt im Münsterland stellt der Bevölkerung 500 Fahrräder an 3 Einstellplätzen zur Verfügung: am Bahnhof (B), am Rathaus (R) und am Rand der Fußgängerzone (F).
Die Räder müssen am Tag der Ausleihe spätestens bis 22:00 Uhr wieder an einem der Standorte B, R oder F abgestellt werden.
Nach einem Monat stellt man fest, dass viele Räder täglich ihren Standort wechseln und zwar immer nach demselben Schema: Von den am Bahnhof entliehenen Rädern werden 5% am Rathaus und 25% an der Fußgängerzone zurückgestellt. Von den am Rathaus entliehenen Rädern werden 30% am Bahnhof und 20 % an der Fußgängerzone zurückgestellt. Von den an der Fußgängerzone entliehenen Rädern werden jeweils 10% am Rathaus und am Bahnhof zurückgestellt.

Diagramm:



Dieses Diagramm heißt **Übergangsgraph**

Tabelle:

Übergangstabelle: Von oben nach unten		Fahrrad geholt bei		
		B	**R**	**F**
Zurück gegeben bei	**B**	*0,7*	*0,3*	*0,1*
	R	*0,05*	*0,5*	*0,1*
	F	*0,25*	*0,2*	*0,8*

Matrix:
Um Rechenoperationen zu vereinfachen wird die Tabelle als Matrix übernommen.
Sie heißt Übergangsmatrix und ist genau so zu lesen, wie die Tabelle.

$$P = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 & 0,1 \\ 0,05 & 0,5 & 0,1 \\ 0,25 & 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$$

Am Bahnhof stehen heute Morgen 250 Fahrräder, am Rathaus 180 und in der Fußgängerzone 120 Stück.
Stelle die Verteilung der Fahrräder als Verteilungsvektor in einer Spalte dar:

Bahnhof (**B**)	250
Rathaus (**R**)	180
FuZo (**F**)	120

$$\overrightarrow{x_0} = \begin{pmatrix} 250 \\ 180 \\ 120 \end{pmatrix}$$

Wie viele stehen heute Abend an den jeweiligen stellen?

Bahnhof (**B**)	*0,7*250+0,3*180+0,1*120 = 241*
Rathaus (**R**)	
FuZo (**F**)	

Wie wurde gerechnet? Wie kann man das als Matrizenmultiplikation darstellen?

$$\overrightarrow{x_1} = P * \overrightarrow{x_0}$$

Stochastische Übergänge lassen sich durch Matrizenmultiplikation darstellen.

Dabei erhält man einen neuen Verteilungsvektor, indem man die Übergangsmatrix mit dem alten multipliziert.

$$\overrightarrow{x_{n+1}} = P * \overrightarrow{x_n}$$

Wie ist die Verteilung der Räder nach 2Tagen? 3Tagen? Einer Woche?
(Runde auf ganze Fahrräder.)

$$\overrightarrow{x_2} = P \cdot \overrightarrow{x_1} = P \cdot P \cdot \overrightarrow{x_0} = P^2 \cdot \overrightarrow{x_0}$$

$$\overrightarrow{x_3} = P \cdot \overrightarrow{x_2} = P^3 \cdot \overrightarrow{x_0}$$

$$\overrightarrow{x_7} = P^7 \cdot \overrightarrow{x_0}$$

Die mehrfache hintereinander Ausführung dieser Übergangsberechnung nennt man:

_____*Markov-Kette*_______________________

Wie viele Fahrradparkplätze muss man auf lange Sicht an den verschiedenen Stationen ungefähr bereithalten?
(Berechne mit GeoGebra die Verteilung nach 30; 35; 60 und 365 Tagen.)

$$\overrightarrow{x_7} = P^{365} \cdot \overrightarrow{x_0}$$

Achtung: Bei GeoGebra den Wert "Runden" auf 5 Stellen einstellen sonst langweilig.

Nach einigen Schritten entlang der Markov-Kette (eigentlich unendlich viele) ergibt sich eine stabile Verteilung.
Man nenn diese: **Fixvektor oder Eigenvektor** zu P.

Der Fixpunktvektor $\overrightarrow{x}$ wird durch die Übergangsmatrix nicht mehr verändert.
Es gilt die Fixpunktgleichung:

$$\overrightarrow{x} = P \cdot \overrightarrow{x}$$

Den Fixpunktvektor erhält man durch:

$$\overrightarrow{x} = \lim_{n \to \infty} P^n \cdot \overrightarrow{x_0}$$

WG 13 Mathe Datum ....

Berechnung des Fixpunktvektors

1. Möglichkeit: (Iterative Möglichkeit) Näherungsweise Berechnung

Durch mehrmaliges Anwenden der Übergangsmatrix P ($n \to \infty$) ergibt sich aus einer Startverteilung eine Grenzverteilung. (Fixpunktvektor)

$$\overrightarrow{x} = \lim_{n\to\infty} P^n \cdot \overrightarrow{x_0}$$

$$\overrightarrow{x_{100}} = P^{100} \cdot \overrightarrow{x_0}$$

$$\overrightarrow{x_{101}} = P^{101} \cdot \overrightarrow{x_0}$$

2. Möglichkeit: Fixpunktgleichung

Die Fixpunktgleichung $\overrightarrow{x} = P \cdot \overrightarrow{x}$ lässt sich Umformen zu

$$\overrightarrow{x} - P \cdot \overrightarrow{x} = 0$$

Mit der Zusatzinformation, dass die Gesamtzahl der Objekte im Verteilungsvektor konstant bleibt (Bsp Fahrräder $x_1 + x_2 + x_3 = 500$ Stück) ergibt sich so ein Gleichungssystem mit 4 Gleichungen und 3 Unbekannten.

Löse dieses an Hand das Beispiels.

$$\begin{pmatrix} 0{,}3 & -0{,}3 & -0{,}1 & 0 \\ -0{,}05 & 0{,}5 & -0{,}1 & 0 \\ -0{,}25 & -0{,}2 & 0{,}2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 500 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 160 \\ 0 & 1 & 0 & 70 \\ 0 & 0 & 1 & 270 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$