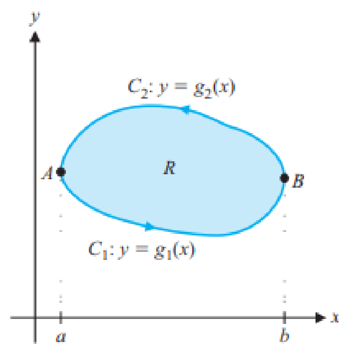
Demostración:

Empezamos asumiendo que la región R puede ser escrita en la forma:

$$R = \{(x, y) | a \leq x \leq b \text{ and } g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\},$$

Donde g1(x) ≤ g2(x), para todo x en el intervalo [a, b], g1(a)=g2(a) también g1(b) = g2(b) como podemos ver a continuación:



Notemos que es posible dividir C en dos partes C1 y C2:

$$C = C_1 \cup C_2,$$

donde C1 sería la porción de debajo de la curva definida por:

$$C_1 = \{(x, y) | a \leq x \leq b, y = g_1(x)\}$$

y C2 sería la porción de arriba definida por:

$$C_2 = \{(x, y) | a \leq x \leq b, y = g_2(x)\}$$

La orientación de ambas esta indicada en la figura. Del Teorema de Evaluación para integrales de línea:

Teorema:

Suponga que f (x, y, z) es continua en una región D que contiene la curva C y que C se describe paramétricamente por x = x (t), y = y (t) ,también z = z (t), donde t varía de t = a hasta t = b y x (t), y (t) ,z (t) tienen primeras derivadas continuas. Luego

$$\int_C f(x, y, z)\,dx = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\,x'(t)\,dt,$$
$$\int_C f(x, y, z)\,dy = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\,y'(t)\,dt \quad \text{and}$$
$$\int_C f(x, y, z)\,dz = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\,z'(t)\,dt.$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned}\oint_C M(x, y)\,dx &= \int_{C_1} M(x, y)\,dx + \int_{C_2} M(x, y)\,dx \\ &= \int_a^b M(x, g_1(x))\,dx - \int_a^b M(x, g_2(x))\,dx \\ &= \int_a^b [M(x, g_1(x)) - M(x, g_2(x))]\,dx,\end{aligned}$$

☺

El signo menos sale de travesar C2 hacia atrás , es decir de derecha a izquierda. Por otro lado notemos que por el ejercicio 9 del examen la igualdad:

$$\begin{aligned}\iint_R \frac{\partial M}{\partial y} dA &= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y}\,dy\,dx \\ &= \int_a^b M(x, y)\Big|_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} dx \qquad \text{By the Fundamental Theorem of Calculus} \\ &= \int_a^b [M(x, g_2(x)) - M(x, g_1(x))]\,dx.\end{aligned}$$

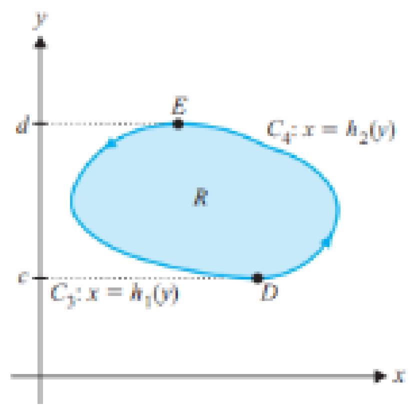
Se cumple y juntándolo con tenemos que:

$$\oint_C M(x, y)\, dx = -\iint_R \frac{\partial M}{\partial y}\, dA.$$

Ahora, asumiremos que podemos escribir igual R de la forma

$$R = \{(x, y) | c \le y \le d \text{ and } h_1(y) \le x \le h_2(y)\},$$

Donde h1(x) ≤ h2(x), para todo x en el intervalo [c, d], h1(a)=h2(a) también h1(b) = h2(b), además de que dividimos la figura como podemos ver a continuación:



En este caso, es posible escribir:

$$\begin{aligned}\oint_C N(x, y)\, dy &= \int_{C_3} N(x, y)\, dy + \int_{C_4} N(x, y)\, dy \\ &= -\int_c^d N(h_1(y), y)\, dy + \int_c^d N(h_2(y), y)\, dy \\ &= \int_c^d [N(h_2(y), y) - N(h_1(y), y)]\, dy,\end{aligned}$$

Donde el signo menos sale de travesar C3 hacia atrás, en este caso de arriba hacia abajo.
Notemos que:

$$\iint_R \frac{\partial N}{\partial x}\, dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \frac{\partial N}{\partial x}\, dx\, dy$$
$$= \int_c^d [N(h_2(y), y) - N(h_1(y), y)]\, dy.$$

Y juntándolo con ☼ nos da:

$$\oint_C N(x, y)\, dy = \iint_R \frac{\partial N}{\partial x}\, dA. \qquad ⚡$$

Y finalmente juntando ♡ con ⚡ tenemos:

$$\oint_C M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA,$$

Como queríamos. ■