UMA BREVE INTRODUÇÃO À HISTÓRIA DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

1º Ten QCO Roberto Junior Batista [1]

Resumo: Embora seja uma das mais importantes ferramentas matemáticas, o cálculo diferencial e integral dificilmente é abordado sob uma perspectiva histórica nos cursos de graduação. Entretanto, esta visão histórica é fundamental para estabelecer uma ponte entre a teoria matemática e suas aplicações em ciências e engenharia. Neste artigo, uma breve introdução à história do cálculo diferencial e integral é apresentada, com o propósito de motivar estudantes de ciências e engenharia. São destacados os aspectos históricos mais importantes e os principais personagens responsáveis pelo seu desenvolvimento.

Palavras-chave: Cálculo Diferencial e Integral, teoria matemática, ciências e engenharia.

Abstract: Although it is one of the most important mathematical tools, the integral and differential calculus is hardly studied from a historical perspective in the graduation degree. However, this historical vision is fundamental for establishing a bridge between mathematical theory and its application in science and engineering. In this article we present a brief introduction to the history of the integral and differential calculus, with the purpose of motivating students of science and engineering. The most important historical aspects and the main characters responsible for its development are put in evidence.

Keywords: Integral and Differential calculus, mathematical theory, science and engineering.

[1] Professor de Física do Colégio Militar de Curitiba
Bacharel e licenciado em Física pela UFPR
Mestrando em Métodos Numéricos em Engenharia pela UFPR
Especialista em Instrumentação para o ensino de Matemática pela UFF
e-mail: roberto_physics@yahoo.com.br

Colegio Militar de Curitiba-Livreto 160 pgs - 3aV - Print.job => 04/06/2010 => 11:30:07 => (Medida 1:1 = 17 x 24)

41

Colegio Militar de Curitiba-Livreto 160 pgs - 3aV - Print.job => 04/06/2010 => 11:30:07 => (Medida 1:1 = 17 x 24)

Os geômetras gregos

Historicamente, é difícil situar com precisão as origens do Cálculo Diferencial e Integral. Antigas questões suscitaram idéias que, sem dúvida, desempenharam um papel importante no seu desenvolvimento, tais como os problemas de quadratura de figuras planas, a delimitação de terrenos destinados ao plantio nas margens dos rios, o cálculo do volume de um silo ou ainda questões financeiras, envolvendo valores pagos sobre um empréstimo. Em um tablete de argila encontrado na Mesopotâmia, datado de 1700 a.C, há um problema envolvendo juros, o que sugere que a prática de cobrar uma taxa sobre o dinheiro emprestado recua ao início da história escrita (*In* "e" – A História de um número, de Eli Maor, ed. Record).

A idéia básica do Cálculo, que consiste em usar o processo de limite para derivar resultados finitos, remonta aos antigos gregos. Arquimedes de Siracusa (287 – 212 a.C), teria sido um dos primeiros a usar o conceito de limite para calcular a área e o volume de várias formas planas e sólidas. Embora ele jamais tenha usado o termo *limite*, podemos perceber hoje que era isso o que ele tinha em mente. A Geometria elementar nos permite calcular a área de qualquer triângulo e, a partir daí, de qualquer polígono. Mas quando nos deparamos com formas curvas ou irregulares, a Geometria elementar se torna insuficiente. A idéia de Arquimedes era obter um círculo e nele inscrever uma série de polígonos regulares, com um número cada vez maior de lados. Este método, cuja descoberta, na verdade é atribuída a Eudoxo, ficou conhecido como *Método da Exaustão*. Esse método chegou perto do moderno conceito cálculo integral. Na verdade, essa é a idéia básica do conceito de limite: uma sucessão de valores numéricos, que pode se aproximar de um determinado valor, tanto quanto quisermos, porém sem nunca atingir este valor. Os geômetras gregos ficaram intrigados com a idéia do infinito. Existirá um último número, além do qual nenhum outro possa ser encontrado? Acredita-se que os fatores, que impediram que os antigos gregos descobrissem o Cálculo, estão baseados na dificuldade destes de lidar com o conceito de infinito.

Zenon, de Eléia (Século IV a.C) propôs quatro paradoxos, mostrando a dificuldade dos geômetras gregos em assimilar a idéia de infinito. Um desses paradoxos tenta mostrar a impossibilidade de um corredor partir de um ponto *A* e

Colegio Militar de Curitiba-Livreto 160 pgs - 3aV - Print.job => 04/06/2010 => 11:30:07 => (Medida 1:1 = 17 x 24)

Colegio Militar de Curitiba-Livreto 160 pgs - 3aV - Print.job => 04/06/2010 => 11:30:07 => (Medida 1:1 = 17 x 24)

chegar a um ponto *B*. Para que um corredor possa mover-se do ponto *A* para o ponto *B*, ele precisa primeiro chegar ao ponto médio da distância *AB*; a partir daí, o ponto médio da distância que falta percorrer e assim por diante. Como esse processo exige um número infinito de passos, uma vez que o corredor sempre deverá percorrer a "metade da metade anterior", Zenon argumentava que o corredor jamais chegaria ao ponto *B*. Hoje seria simples explicar este paradoxo. Admitindo-se que o a distância *AB* corresponda a uma unidade de comprimento ($AB = 1$), a distância total percorrida será fornecida pela soma de $1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \ldots$ Parece estranho, pois a intuição mostra que nunca a soma chegará a 1. No entanto, podemos nos aproximar desse valor, tanto quanto quisermos, indefinidamente. Mas afinal, quantos termos devemos acrescentar para ter uma resposta satisfatória? Alguém sempre poderá acrescentar mais um termo à soma, tornando-a mais próxima de 1. A resposta é que não precisamos acrescentar mais nenhum termo. Em termos matemáticos atuais, dizemos que esta soma tem a propriedade de *convergir* para o valor 1, ou seja, tem o *limite* igual a 1, à medida que o número de termos tende ao infinito. Assim, o corredor percorrerá uma distância total igual a uma unidade, que é à distância *AB* original. Mas os gregos encontraram uma grande dificuldade em admitir que uma soma infinita de números pudesse convergir para um valor finito. Talvez por isso, Arquimedes, ao aplicar o método da exaustão, tenha evitado mencionar a palavra *infinito*. Desta forma, apesar de ter uma compreensão intuitiva de limite, Arquimedes não pôde dar o passo crucial que levaria ao Cálculo Diferencial e Integral.

A geometria dos "indivisíveis"- Prenúncio do Cálculo

Na Obra *Duas Novas Ciências* (1638), de Galileu Galilei, o personagem Salviati afirma que "*Infinidades e indivisibilidades transcendem nossa compreensão finita; as primeiras em virtude da sua magnitude, as últimas em virtude da sua pequenez; imagine como são quando elas se combinam*." A idéia implícita de limite acompanhou o desenvolvimento do Cálculo, mas a sua plena compreensão, mediante uma definição formal custou a aparecer. Por muito tempo, a noção de limite permaneceria obscura, com uma definição geométrica subjetiva e indefinida. Isaac Newton, considerado um dos descobridores do Cálculo, em sua monumental obra, "*Principia*", parece ter sido o primeiro a reconhecer que o limite deve ser o ponto de partida para problemas de tangência e quadraturas,

Colegio Militar de Curitiba-Livreto 160 pgs - 3aV - Print.job => 04/06/2010 => 11:30:07 => (Medida 1:1 = 17 x 24)

tendo ele próprio enunciado uma formulação do conceito de limite, utilizando quantidades infinitamente pequenas e uma regra de eliminação. No lugar dos conceitos rigorosos de limite, convergência e unicidade, Newton se baseia no movimento contínuo, ou seja, ele adota uma visão cinemática das grandezas geométricas. Assim, a moderna definição de limite, base fundamental para o Cálculo Diferencial e Integral, teria que aguardar até o final do século XVIII e início do século XIX.

Para a Geometria Analítica de Descartes, uma figura geométrica pode ser descrita por um conjunto de pontos cujas coordenadas x e y verificam uma equação. Descartes acreditava que sua abordagem analítica da geometria apresentava novas vantagens sobre o método puramente geométrico adotado desde os antigos gregos. No entanto, ele se limitava às expressões algébricas em número finito. A equação de uma seção cônica, como a elipse, por exemplo, só apresenta três termos. Mas, sabia-se que certas grandezas, como áreas de figuras curvas não podem ser exprimidas com um número finito de termos. Para resolver o problema, recorreu-se a diversas técnicas matemáticas. A mais importante delas foi a das séries infinitas. Um exemplo é a soma $y = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + x^5/5...$ Já vimos que uma soma de infinitos termos pode convergir para um valor finito. Assim, do mesmo modo, se a série converge, a soma é finita, ainda que a série tenha infinitos termos. Na época de Newton, as idéias que os matemáticos tinham sobre as séries infinitas não eram bem fundamentadas. A própria série binomial, desenvolvida por Newton pela generalização das séries infinitas, não foi apresentada mediante uma demonstração rigorosa. Newton aplicou seu método aos casos cuja resposta conhecia por outros métodos e verificou que os resultados coincidiam. Com o auxílio da série binomial, Newton pôde calcular a área definida por diversas curvas.

Assim, o conceito de infinito foi adotado de uma forma casual e improvisada, sem muito rigor matemático, mas que funcionava. Esse era o *método dos indivisíveis*. Pensando em uma forma plana como sendo composta por um número de faixas infinitamente estreitas, os chamados "indivisíveis", pode-se encontrar a área da forma ou tirar algumas outras conclusões sobre ela. Por exemplo, pode-se demonstrar a relação entre a área de um círculo e a sua circunferência, considerando o círculo como uma soma de um número infinito de triângulos estreitos, cada um com seu vértice no centro e sua base ao longo da

Colegio Militar de Curitiba-Livreto 160 pgs - 3aV - Print.job => 04/06/2010 => 11:30:07 => (Medida 1:1 = 17 x 24)

circunferência. Como a área de um triângulo é a metade do produto da base pela altura, a área total será a metade do produto entre a altura comum, no caso o raio da circunferência e a soma das bases, que é o comprimento da circunferência. O método, contudo, era defeituoso em vários aspectos. Para começar, ninguém entendia exatamente o que eram esses “indivisíveis”, e muito menos como trabalhar com eles e o método exigia muita engenhosidade, uma vez que para cada situação era necessário formular um tipo de indivisível que melhor se ajustasse ao problema.

Johannes Kepler talvez tenha sido o primeiro a fazer uso dos indivisíveis. Estranhamente, não no ramo da Astronomia, como se poderia esperar, mas para resolver um problema mais prático: calcular o volume de barris de vinho (ao que parece, Kepler estava insatisfeito com o modo como os mercadores vendiam o conteúdo de seus barris). Ele procedeu estendendo o método para três dimensões e considerando um sólido como uma coleção de muitas fatias infinitamente finas, ou lâminas e depois somando seus volumes individuais. Sem perceber, Kepler chegou a um passo do Cálculo Integral.

A questão da quadratura

O problema de encontrar a área de uma forma plana fechada é conhecido como *quadratura*. A palavra refere-se à própria natureza do problema: expressar a área em termos de unidade de área, que são quadrados. Para os gregos, isso significava que a forma dada tinha de ser transformada em um quadrado equivalente cuja área pudesse ser encontrada a partir de princípios básicos. Para dar um exemplo simples, suponha que queremos encontrar a quadratura do retângulo de lados a e b. Se esse retângulo deve ter a mesma área de um quadrado de lado x, teremos $x^2 = ab$. Usando um esquadro e um compasso, podemos facilmente construir um segmento de reta de comprimento “ab.

Assim, poderemos encontrar a quadratura de qualquer retângulo e daí a de qualquer paralelogramo ou qualquer triângulo, porque essas formas podem ser obtidas a partir de um retângulo através de construções simples. Dessa forma, pode-se “quadrar” qualquer polígono, porque um polígono pode sempre ser “dissecado” em triângulos. Esse aspecto puramente geométrico do problema da quadratura abriu caminho para uma abordagem mais computacional. A construção real de uma forma equivalente não era mais considerada necessária, desde que

Colegio Militar de Curitiba-Livreto 160 pgs - 3aV - Print.job => 04/06/2010 => 11:30:07 => (Medida 1:1 = 17 x 24)

Colegio Militar de Curitiba-Livreto 160 pgs - 3aV - Print.job => 04/06/2010 => 11:30:07 => (Medida 1:1 = 17 x 24)

pudéssemos demonstrar que tal construção poderia ser feita. Neste sentido, o método da exaustão não era uma verdadeira quadratura, já que exigia um número infinito de passos e assim não poderia ser realizado por meios puramente geométricos. Mas com a introdução dos processos infinitos na matemática, por volta de 1600, até mesmo esse problema foi resolvido.

Entre as formas que resistiam teimosamente a todas as tentativas de quadratura estava a hipérbole. Arquimedes tentou obter a quadratura da hipérbole, mas não teve êxito. Quando o método dos indivisíveis foi descoberto, os matemáticos do século XVII voltaram a abordar esse problema. Mas, havia agora um outro problema: a hipérbole, ao contrário da elipse ou do círculo, é uma curva que vai ao infinito, assim era necessária uma nova compreensão do conceito de quadratura. Entre os principais matemáticos envolvidos com essa questão, destacaram-se Pierre de Fermat (1601–1665) e René Descartes (1596–1650). Fermat estava interessado na quadratura de curvas cuja equação geral é $y = x^n$, onde n é um inteiro positivo. Essas curvas também são chamadas de parábolas generalizadas (parábola, propriamente dita é o caso em que n = 2). Fermat fez a aproximação da área sob cada curva através de uma série de retângulos cujas bases formam uma progressão geométrica decrescente (figura 1). Com esse método, semelhante ao método da exaustão de Arquimedes, Fermat chegou a uma expressão equivalente a $\int x^n dx = x^{n+1}/(n+1)$ em torno de 1640, ou seja, quase trinta anos antes de Newton e Gottfried W. Leibniz apresentarem as bases do Cálculo Integral.

O trabalho de Fermat representou um grande avanço, pois conseguia a quadratura não somente de uma curva, mas de toda uma família de curvas.

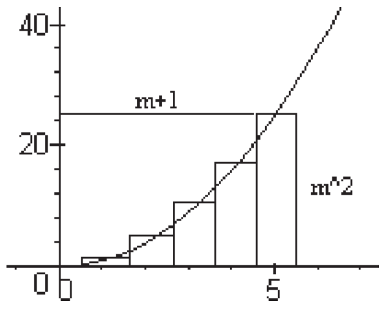

Figura 1. O método de Fermat de aproximação da área por meio de retângulos, onde as bases formam uma progressão geométrica.

Alem disso, ao modificar ligeiramente seu procedimento, Fermat

Colegio Militar de Curitiba-Livreto 160 pgs - 3aV - Print.job => 04/06/2010 => 11:30:07 => (Medida 1:1 = 17 x 24)

mostrou que a equação $y = x^n$ permanece válida mesmo quando n é um número negativo, desde que agora seja calculada a área $x = a$ (onde $a > 0$) até o infinito. Apesar de sua aparente semelhança, as duas formas representam dois tipos bem diferentes de curvas: as primeiras são contínuas em toda a parte, enquanto as últimas se tornam infinitas em $x = 0$ e, em conseqüência, possuem uma "quebra" (uma assíntota vertical) neste ponto. Além disso, a equação de Fermat falha para uma curva da qual toda a família deriva o seu nome: a hipérbole $y = 1/x = x^{-1}$. Isso ocorre porque para n = -1, o denominador n + 1 na equação $x^{n+1}/(n + 1)$ se torna nulo. Coube a um dos contemporâneos de Fermat resolver esse caso excepcional. Grégoire (ou Gregorius) de Saint – Vincent (1584–1667), um jesuíta belga que passou a maior parte de sua vida trabalhando em vários problemas de quadratura. Seu principal trabalho, *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni* (1647), mostra que ele observou que quando n = – 1, os retângulos usados na aproximação da área sob a hipérbole possuem todos áreas iguais. Isto significa que, à medida que a distância de zero cresce geometricamente, as áreas correspondentes crescem em incrementos iguais. Por sua vez, isso implica que a relação entre a área e a distância é *logarítmica*.

Se denotarmos por *A(t)* a área sob a hipérbole, a partir de um ponto de referência fixo x > 0 até um ponto variável $x = t$, teremos $A(t) = \log t$ (figura 2). Assim, a quadratura da hipérbole foi finalmente conseguida cerca de dois mil anos depois dos gregos, que foram os primeiros a enfrentar o problema.

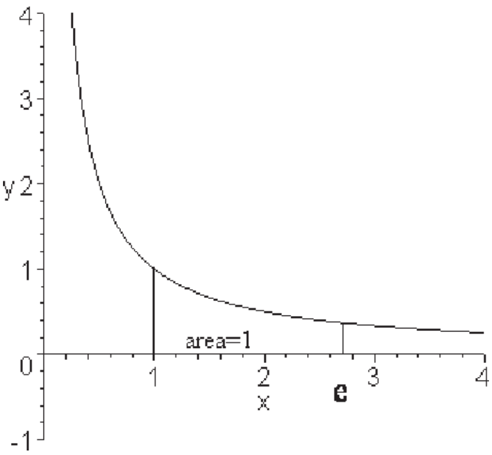

Figura 2. A área sob a hipérbole tem tem valor unitário no intervalo (1,e)

Colegio Militar de Curitiba-Livreto 160 pgs - 3aV - Print.job => 04/06/2010 => 11:30:07 => (Medida 1:1 = 17 x 24)

Nova matemática

Em meados do século XVII, as principais idéias por trás do cálculo já eram razoavelmente bem conhecidas pela comunidade matemática. O método dos indivisíveis (infinitésimos), apesar de ainda ter uma base incerta, tinha sido aplicado com sucesso a um conjunto de curvas e sólidos; e o método da exaustão de Arquimedes, em sua forma moderna, tinha ajudado a resolver o problema de quadratura da família de curvas $y = x^n$. Mas embora esses métodos fossem bem-sucedidos, eles ainda não estavam fundidos em um sistema único; cada problema exigia uma abordagem diferente e o sucesso dependia da engenhosidade, habilidade com a álgebra e um pouco de sorte. O que faltava ainda era um procedimento geral e sistemático – um conjunto de algoritmos – que possibilitariam resolver esses problemas com facilidade e eficiência. Esse procedimento foi fornecido por Newton e Leibniz.

Newton estudou por conta própria os clássicos da matemática de seu tempo. *Os elementos*, de Euclides, *La Geométrie*, de Descartes, a *Arithmetica infinitorum*, de Wallis e os trabalhos de Viète e Kepler. Nenhum desses livros é de leitura fácil, mesmo hoje, quando os temas que eles abordam são bem conhecidos. Certamente, também não eram na época de Newton, quando o conhecimento matemático era privilégio de poucos.

Os problemas abordados naquela época são, basicamente, de dois tipos: o primeiro consiste, em uma dada curva, determinar a tangente em um de seus pontos. O segundo problema é o cálculo da área delimitada por uma curva. Depois que descobriu a série binomial, Newton observa que na verdade, esses dois problemas são inversos um do outro. Na notação atual, diríamos que o cálculo da tangente corresponde a uma operação denominada derivada e o cálculo da área corresponde a uma operação de integração. Esta descoberta foi uma das mais importantes na história da Matemática e hoje é conhecida como o *Teorema Fundamental do Cálculo*. Ela não se refere à resolução um certo problema particularmente difícil, mas à resolução de toda uma "família" de problemas. É o *Cálculo Diferencial e Integral*, ou *Cálculo Infinitesimal*, que o alemão Leibniz inventa quase ao mesmo tempo em que Newton e forma em nossos dias, um conjunto de operações indispensáveis a todos os ramos da ciência.

Newton adota uma visão cinemática das grandezas geométricas, ou seja, ele as concebe como se fossem produzidas por um movimento contínuo. Assim uma curva é considerada como a trajetória de um ponto em movimento. As grandezas geradas são chamadas *fluentes*. Suas velocidades instantâneas ou taxas de crescimento, são chamadas de *fluxões*. As *fluentes* são designadas pelas letras *x, y, z* e as fluxões por $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ e as correspondentes fluentes por x, y, z. A importância do teorema fundamental está no fato de que é relativamente simples encontrar a tangente de uma curva, mas é bem mais difícil calcular a área sob uma curva. O ponto de partida de Newton foi considerar duas variáveis que se relacionam através de uma equação como $y = x^2$. Hoje chamaríamos esse "relacionamento" de *função* e para indicar que *y* é uma função de *x* escrevemos $y = f(x)$. Essa relação é representada no plano *xy* por uma parábola. Newton imaginou o gráfico de uma função como uma curva gerada por um ponto móvel *P(x,y)*. À medida que *P* traça a curva, ambas as coordenadas, *x* e *y*, variam continuamente com o tempo; imaginava-se o próprio tempo "fluindo" a uma taxa uniforme – daí a palavra *fluente*. Newton então partiu para encontrar as taxas de mudança de *x* e *y* em relação ao tempo, isto é, suas *fluxões*. Ele conseguiu isso considerando a diferença, isto é, a mudança, nos valores de *x* e *y* entre duas ocasiões "adjacentes", então, dividindo essa diferença pelo intervalo de tempo transcorrido. O passo final, e crucial, foi fazer o intervalo de tempo transcorrido igual a zero – ou, mais precisamente, pensar nele como tão pequeno a ponto de ser desprezível. Como exemplo do método, vamos analisar a função $y = x^2$ (Um corpo em queda livre nas imediações da superfície terrestre, por exemplo, ocupa posições sucessivas que dependem do tempo de forma análoga a esta equação). Vamos considerar o intervalo de tempo e (Newton usou a letra O, mas para evitar a possível confusão com zero, usaremos e). Durante esse intervalo de tempo a coordenada x muda na quantidade $\dot{x}$e, onde $\dot{x}$ é a taxa de mudança ou fluxão de x (esta notação ficou conhecida como a "notação do ponto") de modo semelhante, a mudança de y é $\dot{y}$e . Substituindo x por x + $\dot{x}$e, e y por y + $\dot{y}$e na equação $y = x^2$, teremos $y + \dot{y}e = (x + \dot{x}e)^2 = x^2 + 2x\dot{x}e + (\dot{x}e)^2$. Como $y = x^2$, podemos cancelar o y no lado esquerdo com o x^2 no lado direito. Dividindo ambos os lados por e termos $\dot{y} = 2x\dot{x} + \dot{x}^2e$. O passo final é fazer e igual a zero, o que nos deixa com $\dot{y} = 2x\dot{x}$. Esta é a relação entre as fluxões dos dois fluentes, x e y, ou, em linguagem moderna, entre as taxas de mudança das variáveis x e y, cada uma considerada como uma função do tempo.

Colegio Militar de Curitiba-Livreto 160 pgs - 3aV - Print.job => 04/06/2010 => 11:30:07 => (Medida 1:1 = 17 x 24)

Colegio Militar de Curitiba-Livreto 160 pgs - 3aV - Print.job => 04/06/2010 => 11:30:07 => (Medida 1:1 = 17 x 24)

Newton deu vários exemplos de como funciona este "método das fluxões". O método é totalmente generalizado: pode ser aplicado a quaisquer dois fluentes que se relacionem um com o outro através de uma equação. Em virtude da associação com a tangente, o processo de encontrar a fluxão de um determinado fluente ficou conhecido como *problema da tangente* na época de Newton. Hoje chamamos esse processo de *diferenciação* e a fluxão de uma função chamamos de *derivada*.

Como foi comentado anteriormente, o método das fluxões de Newton não era uma idéia inteiramente nova. A importância da descoberta de Newton é que ela forneceu um procedimento geral – um algoritmo – para se encontrar a taxa de mudança de praticamente qualquer função. A maioria das regras, que hoje aprendemos nas aulas de cálculo, foram descobertas por ele. Por exemplo, se $y = x^n$, então $\dot{y} = nx^{n-1}\dot{x}$. Seus predecessores abriram o caminho, mas foi Newton quem transformou essas idéias em uma ferramenta poderosa, universal, que logo seria aplicada com enorme sucesso a todos os ramos da ciência. Newton, em seguida considerou o inverso do problema da tangente: dada uma fluxão, encontrar o fluente. Este é um problema mais difícil, assim como é mais difícil dividir do que multiplicar, ou extrair uma raiz do que quadrar um número. Tendo demonstrado que a fluxão de $y = x^n$ é $\dot{y} = nx^{n-1}\dot{x}$, Newton inverteu a fórmula, de modo que agora ela dizia: se a fluxão for $\dot{y} = nx^{n-1}\dot{x}$, então o fluente será $y = x^{n+1}/(n + 1)$, descontando a constante a ser somada, pois $y = x^2 - 5$ ou $y = x^2 + 8$ também seriam respostas, pois os gráficos de todas essas funções são obtidos a partir do gráfico de $y = x^2$, meramente deslocando-o para cima ou para baixo, pois todas possuem a mesma inclinação em qualquer valor de x. Assim, uma certa fluxão tem uma quantidade infinita de fluentes, diferindo entre si apenas por uma constante arbitrária. Hoje o processo de encontrar o fluente de determinada fluxão é chamado de *integração indefinida.* Como no caso do Teorema Binomial, Newton não fez uma demonstração formal do Teorema Fundamental do Cálculo, mas compreendeu plenamente sua essência.

Newton e Leibniz

Isaac Newton e Gottfried W. Leibniz são sempre mencionados como co-descobridores do cálculo. Entre as contribuições de Leibniz para a Matemática,

Colegio Militar de Curitiba-Livreto 160 pgs - 3aV - Print.job => 04/06/2010 => 11:30:07 => (Medida 1:1 = 17 x 24)

Colegio Militar de Curitiba-Livreto 160 pgs - 3aV - Print.job => 04/06/2010 => 11:30:07 => (Medida 1:1 = 17 x 24)

além do cálculo, estão os seus trabalhos para a análise combinatória, seu reconhecimento do sistema binário de numeração e sua invenção de uma máquina calculadora capaz de somar e multiplicar. Ele também tentou desenvolver um sistema formal de lógica no qual todas as deduções poderiam ser feitas como em algoritmos computacionais.

Na Matemática, uma boa escolha dos símbolos é quase tão importante quanto o assunto que eles representam, e no Cálculo não é diferente. Nesse aspecto, a notação de Leibniz apresentou várias vantagens sobre o método das fluxões de Newton. Leibniz concebeu seu cálculo diferencial e integral por volta de 1675 e, em 1677, já tinha um sistema plenamente desenvolvido e funcional. Desde o começo, sua abordagem era diferente da de Newton, que se baseava na Física. Já Leibniz estava mais próximo da filosofia do que da Física e sua concepção de Cálculo era mais abstrata. Ele pensava em termos de *diferenciais*, pequenos acréscimos nos valores das variáveis x e y. Esses aumentos foram chamados por ele de dx e dy, respectivamente. Ele então argumentou que se dx e dy fossem suficientemente pequenos, a linha tangente ao gráfico em P seria idêntica ao próprio gráfico na vizinhança do ponto P (figura 3).

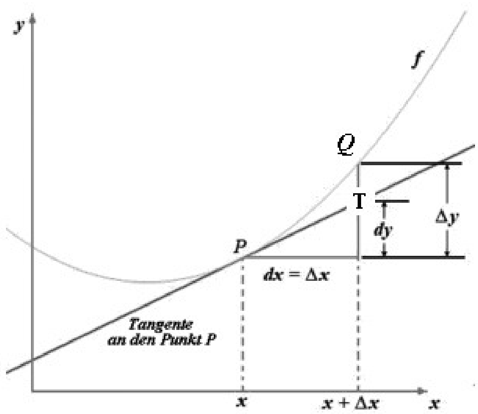

Figura 3. A inclinação (ou coeficiente angular) da reta T corresponde ao valor Dy/Dx.

Para encontrarmos a inclinação da linha tangente em P, só precisamos achar a proporção altura-largura do triângulo característico, isto é, a taxa dy/dx. Leibniz então raciocinou que, como dy e dx são quantidades pequenas (infinitésimos), sua relação representa não apenas a inclinação da linha tangente a *P*, mas também a inclinação do gráfico em *P*. A proporção *dy/dx* é então equivalente à fluxão de Newton. Mas há uma falha nesse argumento. A linha tangente, embora quase idêntica à curva, perto de *P*, não coincide com ela. As duas só coincidem se os pontos *P* e *T* na figura 2 coincidissem, isto é, quando o triângulo característico encolhesse até se tornar um ponto. Mas então, ambos os lados, dx e dy se tornariam zero e sua proporção seria a expressão indeterminada 0/0. Hoje nós contornamos esta dificuldade definindo a inclinação como um *limite*. O que Leibniz chamou de dy/dx e pensou como uma proporção entre dois pequenos acréscimos, escreve-se hoje em dia como Dy/Dx. Geometricamente, a proporção Dy/Dx – chamada de quociente diferencial – é a inclinação da linha secante entre *P* e *Q* (figura 4). À medida que Dx se aproxima de 0, o ponto *Q* se move para trás em direção ao ponto *P*, ao longo do gráfico, fazendo com que a linha secante gire, até que, no limite, ela coincidirá com a linha tangente. E é a inclinação desta última que nós representamos por dy/dx e chamamos de derivada de y em relação a x.

A notação da letra pontuada adotada por Newton, sobreviveu na Inglaterra por mais de um século e ainda pode ser encontrada em livros de Física para denotar a diferenciação em relação ao tempo. A Europa continental, entretanto, adotou a notação diferencial de Leibniz, *dy/dx*. Essa notação para a derivada apresenta muitas vantagens. É altamente sugestiva e de muitos modos se comporta como fração ordinária. Por exemplo, se $y = f(x)$ e $x = g(t)$, então y é uma função indireta de t, $y = h(t)$. Para calcular a derivada desta função composta nós usamos a regra da cadeia: $dy/dt = (dy/dx) \cdot (dx/dt)$. Nota-se que, embora cada derivada tenha seu próprio limite, ela se comporta como se fosse uma proporção real entre duas quantidades finitas. A regra da cadeia mostra a grande utilidade da notação de Leibniz: podemos manipular o símbolo *dy/dx* como se ele fosse realmente uma proporção de duas quantidades. A notação da letra pontuada de Newton não apresenta o mesmo poder sugestivo.

Colegio Militar de Curitiba-Livreto 160 pgs - 3aV - Print.job => 04/06/2010 => 11:30:07 => (Medida 1:1 = 17 x 24)

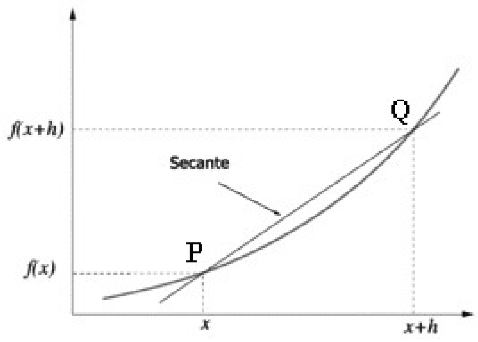

Figura 4. Na medida em que o ponto Q se aproxima do ponto P, Dy/Dx se aproxima de dy/dx e a reta secante se aproxima da reta tangente.

Limite: a antiga discussão sobre o infinitésimo

O conceito de limite é indispensável para definir a inclinação, ou taxa de variação de uma função. Mas na época de Leibniz e Newton, o conceito de limite ainda não era conhecido; a distinção entre uma proporção entre duas quantidades finitas, ainda que pequenas, e o limite dessa proporção quando as duas quantidades tendem a zero, causou muita confusão e levantou sérias dúvidas sobre as bases do cálculo diferencial. Essas questões só foram completamente resolvidas no século XIX, quando o conceito de limite foi estabelecido em bases sólidas.

A princípio, o conhecimento do Cálculo ficou restrito a um pequeno grupo de matemáticos. O círculo de Newton na Inglaterra e Leibniz e os irmãos Bernoulli no continente. Os Bernoulli propagaram-no por toda a Europa, ensinando-o, a vários matemáticos. Curiosamente, na Inglaterra, onde tinha se originado, o Cálculo não se saiu tão bem. A figura grandiosa de Newton desencorajava os matemáticos britânicos a estudar o assunto com vigor. E o que era pior, ao se colocarem inteiramente do lado de Newton na disputa de prioridade, eles se desligaram dos desenvolvimentos feitos no continente. Teimosamente, mantinham a notação de pontos de Newton, negando-se a ver as vantagens da notação diferencial de Leibniz.

O nome "derivada" foi criado por Joseph Louis Lagrange, que também introduziu o símbolo $f'(x)$ para a derivada de $f(x)$. Entre outros matemáticos daquele período, estava o francês Guillaume François Antoine L'Hopital (1661-1704), que escreveu o primeiro livro-texto sobre o assunto, *Analyse des infiniment petits*.

Colegio Militar de Curitiba-Livreto 160 pgs - 3aV - Print.job => 04/06/2010 => 11:30:07 => (Medida 1:1 = 17 x 24)

Outros matemáticos do continente o seguiram e logo o Cálculo era o tópico dominante na matemática do século XVIII. Ele foi rapidamente expandido para cobrir todo um conjunto de temas relacionados, notadamente equações diferenciais e o cálculo de variações. Esses temas ficaram sob a ampla categoria da *análise*, ramo da Matemática que lida com a variação, a continuidade e os processos infinitos.

Colegio Militar de Curitiba-Livreto 160 pgs - 3aV - Print.job => 04/06/2010 => 11:30:07 => (Medida 1:1 = 17 x 24)

Colegio Militar de Curitiba-Livreto 160 pgs - 3aV - Print.job => 04/06/2010 => 11:30:07 => (Medida 1:1 = 17 x 24)

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARRUDA, A. I. *Considerações sobre os sistemas formais NFn*. 1964. Tese (Doutorado em Matemática) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, 1964.

BERKELEY, G. *The analyst*. London: printed for J. Tonson, 1734.

BERNOULLI, J. *Opera*. Genevae: Cramer & Philibert (ed.), 1744.

BOYER, C. B. *História da matemática*. Tradução de E. Gomide. São Paulo: Ed. Edgard Blücher Ltda, EDUSP, 1974.

CARNIELLI, W. A. Lógicas não-clássicas, teoria da informação e inteligência artificial. In.

ÉVORA, F. (ed.). *SéculoXX*: o nascimento da ciência contemporânea. Campinas: Unicamp/CLE, 1992. p.101-110. (Coleção CLE, v.11)

DA COSTA, N. C. A. *Sistemas formais inconsistentes*. 1963a. 68 p. Tese (Cátedra de Matemática) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 1963a.

DE l'HOSPITAL, G. F. A. *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*. Paris: Imprimerie Royale, 1696.

DESCARTES, R. *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences*. Leyde: Jean Maire (ed.), 1637.

D'OTTAVIANO, I. M. L. On the development of paraconsistent logic and da Costa's work. *The Journal of Non-Classical Logic*, v. 7, p. 89-152, 1990.

GALILEI, G. *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*. Leida: Louis Elsevier (ed.), 1638. Tradução para o italiano da primeira edição, em latim, de 1635.

KEISLER, H. J. *Elementary calculus*: an infinitesimal approach. 1. ed. Boston: Prindle, Weber & Schmidt, 1976.

KEPLER, J. *Nova stereometria doliorum vinariorum*. Lincii: J. Pancvs, 1615.

LEIBNIZ, G. W. Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus. *Acta Eruditorum.* Leipzig, 1684.

NEWTON, I. *Philosophiae naturalis principia mathematica*. London: Royal Society, 1687.

RUSSELL, B. Mathematical logic as based on the theory of types. *American Journal of Mathematics*, v. 30, p. 222-262. Baltimore: The Johns Hopkins University Press, 1908.

WALLIS, J. *Johannis Wallis opera mathematica*. (3 v.). Oxoniae: E Theatro Sheldoniano, 1693.

WEIERSTRASS, K. T. Z. Zur theorie der abelschen functionen. *Crelle's Journal*. Berlin, 1854.

Colegio Militar de Curitiba-Livreto 160 pgs - 3aV - Print.job => 04/06/2010 => 11:30:07 => (Medida 1:1 = 17 x 24)