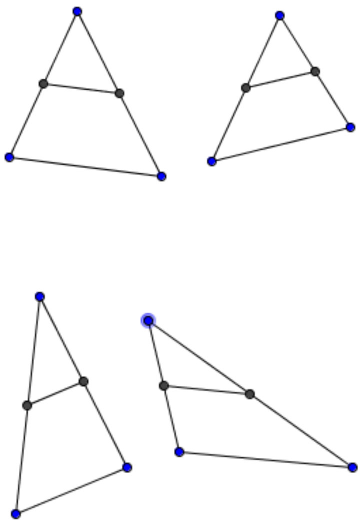
7. Ανάλυση της δραστηριότητας

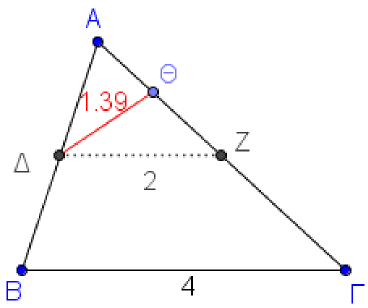
7.1 Το σκεπτικό της πορείας προς την ανακάλυψη

Αρχικά διανέμεται ένα φύλλο εργασίας που περιέχει 4 τρίγωνα στα οποία έχει ήδη χαραχτεί το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα μέσα των δύο πλευρών. Ζητείται από τους μαθητές να εξετάσουν στα συγκεκριμένα τρίγωνα την ορθότητα των δύο συλλογισμών ή αν το κρίνουν σκόπιμο να σχεδιάσουν οι ίδιοι δικά τους τρίγωνα..



Στο σημείο αυτό έχει ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε τις πρώτες αντιδράσεις των μαθητών στο στατικό περιβάλλον του χαρτιού και να τις συγκρίνουμε στη συνέχεια με εκείνες στο δυναμικό περιβάλλον του λογισμικού. Είναι φανερό ότι επιχειρούμε με αυτόν τον τρόπο να αναδείξουμε τους εγγενείς περιορισμούς που προκύπτουν από την έλλειψη δυναμικού περιβάλλοντος σε αντίθεση με το δυναμικό περιβάλλον του δομήματος που θα χρησιμοποιήσουν στην επόμενη φάση.

Σκοπός αυτής της φάσης είναι η αντίληψη της ανάγκης από τους μαθητές ενός δυναμικού περιβάλλοντος στο οποίο να υπάρχει η δυνατότητα για πολλαπλούς μετασχηματισμούς των στοιχείων του τριγώνου και επομένως η συγκριτική των δύο περιβαλλόντων: στατικό χαρτί έναντι του δυναμικού περιβάλλοντος του λογισμικού.



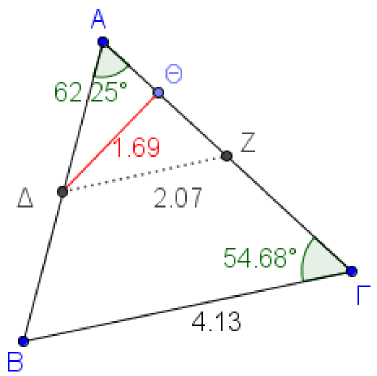
Πειραματισμός με το συγκεκριμένο δόμημα για τον έλεγχο του ισχυρισμού

Επομένως σε εύλογο διάστημα παροτρύνουμε τους μαθητές να δημιουργήσουν οι ίδιοι ένα μοντέλο του προβλήματος στο περιβάλλον του Geogebra και να ξεκινήσουν με αυτό τον πειραματισμό τους. Σε αυτή τη φάση απαιτείται οι μαθητές να μετασχηματίζουν διαρκώς το τρίγωνο, ώστε να είναι σίγουροι ότι πήραν όλες τις περιπτώσεις.[3]

7.2 Η πορεία προς την ανακάλυψη της συνθήκης

Η 2^{η} φάση περιλαμβάνει τον πειραματισμό που αφορά στην εύρεση της ικανής και αναγκαίας συνθήκης που καθορίζει την ύπαρξη και 2^{ου} σημείου στην πλευρά ΑΓ.

Παροτρύνουμε τους μαθητές να πειραματιστούν με όσο το δυνατό διαφορετικά τρίγωνα προκειμένου να αντιληφθούν τη συμμεταβολή εκείνων των μεγεθών που καθορίζουν την έκβαση του προβλήματος. Στο σημείο αυτό μάλιστα αναμένεται να έχει

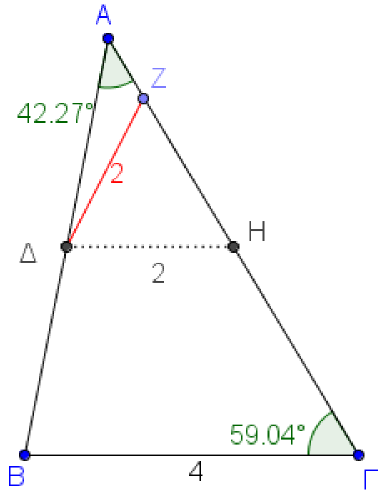


Για την εύρεση της ικανής και αναγκαίας συνθήκης, απαιτείται η μέτρηση των γωνιών Α και Γ

[3] Όσον αφορά τα είδη των τριγώνων ως προς τις γωνίες τους: Εδώ σημειώνουμε ότι στην περίπτωση που θεωρήσουν το τρίγωνο αμβλυγώνιο στην κορυφή Γ 9και όχι μόνο) βρίσκονται αρκετά κοντά στην ανακάλυψη του 2^{ου} σημείου.

υπάρξει η απαιτούμενη εξοικείωση τόσο με τις λειτουργίες του δομήματος όσο και με τις δυναμικές μεταβολές των τριγώνων ΑΒΓ.

Θεωρείται επομένως αρκετά πιθανό οι μαθητές να εντοπίσουν τη συμμεταβολή μεταξύ των γωνιών Α και Γ του τριγώνου ως τον ζητούμενο ρυθμιστικό παράγοντα. Σε κάθε περίπτωση παρουσιάζει ενδιαφέρον η διατύπωση καθώς και η έκφραση των σκέψεων που κάνουν επ' αυτού οι μαθητές όπως επίσης και η διαρκής παρακολούθηση από τον εκπαιδευτικό, του βαθμού αποτελεσματικότητας της διαμεσολάβησης του εργαλείου, για την πρόκληση σημειωτικού δυναμικού ως προς το καίριο αυτό σημείο της δραστηριότητας.[4]



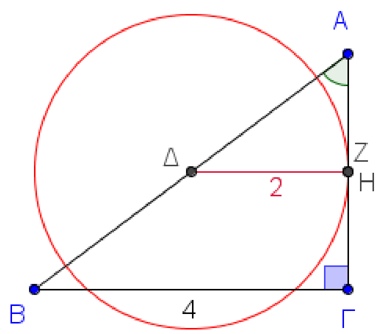
Πειραματισμός με το συγκεκριμένο δόμημα για τον έλεγχο του ισχυρισμού

7.3 Διαδικασίες διερεύνησης - Διατύπωση εικασίας:

Στο στάδιο αυτό οι μαθητές καλούνται να διατυπώσουν μια γενική εικασία, η οποία να περιγράφει τις παρατηρήσεις τους.

Θα υπάρχει εσωτερικό σημείο Ζ της ΑΓ διαφορετικό του μέσου Η με $ΔZ = ΔH = \frac{ΒΓ}{2}$ αν και μόνο αν $A < \hat{Γ}$.

Είναι γνωστό ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες τόσο στη διατύπωση όσο και κυρίως στην αντιληπτική τους ικανότητα, να διαπιστώνουν ότι μια πρόταση αποτελεί ικανή και –όχι απαραίτητα και - αναγκαία συνθήκη για την ισχύ μιας άλλης.



Όταν η γωνία Γ είναι ορθή, τότε δεν υπάρχει 2° σημείου στην πλευρά ΑΓ.

Αναμένεται συνεπώς να υπάρξει δυσκολία στην αντίληψη της ανάγκης για τη διατύπωση ικανής και αναγκαίας συνθήκης στην παραπάνω εικασία. Είναι συχνό το φαινόμενο να διατυπώνεται από τους μαθητές η αναγκαία συνθήκη ώστε να ισχύει μια ιδιότητα (επειδή είναι αυτή που φαίνεται…) και να υπάρχει καταγεγραμμένη δυσκολία τόσο στη διατύπωση όσο και –στην προγενέστερη- δυσκολία αντίληψης ελέγχου και του ικανού μιας συνθήκης.

Επομένως σε αυτή την περίπτωση απαιτείται η παρέμβαση του εκπαιδευτικού: Ο εκπαιδευτικός ζητάει τώρα από τους μαθητές να βρουν τρόπο ώστε να κατασκευάζουν το 2° σημείο Ζ στην πλευρά ΑΓ. Με αυτόν τον τρόπο είναι δυνατό να προκαλέσει την υποψία για το «ποια συνθήκη θα είναι και ικανή ώστε να κατασκευάζεται (δηλαδή να υπάρχει) το 2° σημείο Ζ στην πλευρά ΑΓ». Επίσης με αυτόν τον τρόπο δίνεται το περιθώριο στους μαθητές, να υποψιαστούν την αναγκαιότητα να εξετάσουν αν ισχύει το αντίστροφο, το οποίο «κατοχυρώνει» τις ιδέες τους για το «πότε»

[4] Στην περίπτωση όπου δεν υπάρχει απαιτούμενος χρόνος, είναι δυνατό να παροτρύνουμε τους μαθητές να εξετάσουν με μετρήσεις τις γωνίες του τριγώνου.

μπορούμε να ισχυριστούμε με βεβαιότητα την ύπαρξη του σημείου Ζ. Με άλλα λόγια να εξετάσουν αν η συνθήκη $A < \hat{\Gamma}$ είναι και **ικανή** για την ύπαρξη του σημείου Ζ, ώστε $AZ = \frac{B\Gamma}{2}$.

Τέλος, ακόμη και αν διατυπωθεί με την παραπάνω τυπικότητα η εικασία των μαθητών, παραμένει ανοικτό το ερώτημα αν υπάρχει περίπτωση και όταν $A < \hat{\Gamma}$ να μην ισχύει η πρόταση.

Στο σημείο αυτό αναδεικνύεται η προστιθέμενη αξία του ψηφιακού δομήματος: οι μαθητές μπορούν να διαπιστώσουν μέσω του πειραματισμού τους ότι για τις περιπτώσεις όπου $A < \hat{\Gamma}$ και $\hat{\Gamma} = 90^\circ$ δεν ισχύει το παραπάνω και από το συγκεκριμένο εύρημα να προχωρήσουν στην ολοκλήρωση της διερεύνησης και του τελικού σχηματισμού της εικασίας τους.

Επισημαίνουμε σε αυτή τη φάση στους μαθητές ότι έχουμε ενσωματώσει ορισμένα από τα εργαλεία του Geogebra από τα οποία θα πρέπει να επιλέξουν οι ίδιοι ποιο θα χρησιμοποιήσουν και που θα τους διευκολύνουν στον πειραματισμό τους. ([5])

Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι σε όλη τη διάρκεια του πειραματισμού ο εκπαιδευτικός δεν δίνει καμία υπόδειξη που να αφορά στη χρήση των εργαλείων εκτός μόνο από το γενικό τρόπο χρήσης τους αν και εφόσον ζητηθεί κάτι τέτοιο.

Επομένως η τελική διατύπωση της εικασίας θα πρέπει να είναι η εξής:

Θα υπάρχει εσωτερικό σημείο Ζ της ΑΓ διαφορετικό του μέσου Η με $\Delta Z = \Delta H = \frac{B\Gamma}{2}$ αν και μόνο αν $A < \hat{\Gamma} \neq 90^\circ$.

Σχόλιο: Η αναφορά στο ότι το σημείο Ζ είναι εσωτερικό της πλευράς ΑΓ, είναι καίριας σημασίας, αφού αυτό αποτελεί βασικό στοιχείο της τυπικής απόδειξης (βλ. παρακάτω).

7.4 Η τυπική απόδειξη

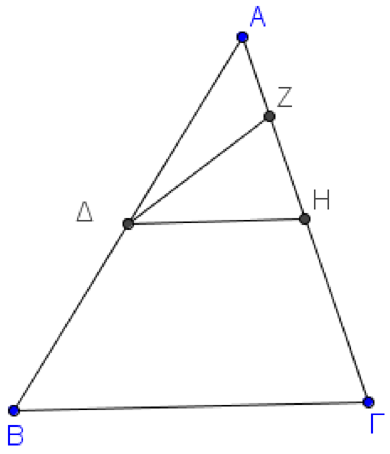
[5] Είναι ίσως δυνατό να λειτουργήσει ως επιπλέον κίνητρο για τους μαθητές, αν τεθεί ότι η άσκοπη χρήση εργαλείων αφαιρεί πόντους από την τελική επίδοση της ομάδας… Κατά τη διάρκεια επίσης του πειραματισμού είναι ενδιαφέρον, ο εκπαιδευτικός να παρατηρεί τους διαλόγους των μαθητών για το ποια εργαλεία θα χρησιμοποιήσουν προκειμένου να καταλήξουν σε κάποιο συμπέρασμα και να υπάρξει διάλογος μετά το πέρας της δραστηριότητας, που θα αφορά στην αιτιολόγηση των μαθητών για τους λόγους που αφορούσαν στη συγκεκριμένη χρήση εργαλείων.

Ευθύ:

Αν υπάρχει σημείο $Z \neq H$ εσωτερικό στην ΑΓ ώστε:
$\Delta Z = \Delta H = \dfrac{B\Gamma}{2}$ τότε $A < \hat{\Gamma}$.

Απόδειξη:

Θεωρείστε ένα τρίγωνο ΑΒΓ για το οποίο υπάρχει σημείο Ζ στην ΑΓ, ώστε : $\Delta Z = \Delta H = \dfrac{B\Gamma}{2}$.



Για την απόδειξη της αναγκαίας συνθήκης του προβλήματος.

1. Ποια σχέση συνδέει τις γωνίες ΔHZ και $\hat{\Gamma}$; Δικαιολογήστε την απάντηση σας:

____

____

2. Ποια σχέση συνδέει τις γωνίες $\Delta\hat{Z}H$ και A ; Δικαιολογήστε την απάντηση σας:

____

____

3. Από το συνδυασμό των προηγουμένων προκύπτει το συμπέρασμα ότι:

____

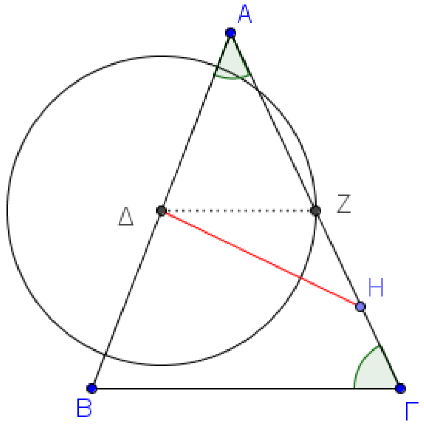
Αναμενόμενες Απαντήσεις:

Από την υπόθεση το τρίγωνο ΔΖΗ είναι ισοσκελές και άρα $\Delta\hat{Z}H = ZH\Delta$ και επειδή $ZH\Delta = \hat{\Gamma}$ (εντός εκτός και επί τα αυτά) άρα $\Delta\hat{Z}H = \hat{\Gamma}$. Όμως $\Delta\hat{Z}H > A$ γιατί το σημείο Ζ είναι εσωτερικό της ΑΓ και άρα η γωνία ΔΖΗ είναι εξωτερική του τριγώνου ΑΔΖ.

Επομένως τελικά θα είναι: $A < \hat{\Gamma}$.

Αντίστροφο:

Έστω ότι $A<\hat{\Gamma}\neq 90^\circ$. Τότε θα αποδείξουμε ότι υπάρχει εσωτερικό σημείο Ζ της ΑΓ, ώστε $\Delta Z=\Delta H=\frac{B\Gamma}{2}$.



Για την απόδειξη της αναγκαίας συνθήκης του προβλήματος.

Απόδειξη: ([6])

1. Πώς μπορούμε να αξιοποιήσουμε κατάλληλο εργαλείο από τα υπάρχοντα, ώστε να κατασκευάσουμε ένα σημείο Ζ; (Αξιοποιήστε το λογισμικό).Με βάση την κατασκευή σας, διατυπώστε μια ισοδύναμη πρόταση που αρκεί να αποδείξουμε:

____

____

2. Ποια σχέση προκύπτει για τις γωνίες ΔHA & A ;

____

____

3. Μπορούμε να γνωρίζουμε τώρα και σχέση μεταξύ των πλευρών ΑΔ και ΔΗ;

____

____

4. Μπορεί το σημείο Η να βρίσκεται μεταξύ των Ζ και Γ;

   Ένας μαθητής έδωσε την παρακάτω απάντηση:

   Αν το Η ήταν εσωτερικό του τμήματος ΖΓ θα έπρεπε $\Delta\hat{Z}A>\Delta HZ$ ως εξωτερική γωνία του τριγώνου ΔΗΖ που είναι άτοπο αφού ΔΗ=ΔΖ

   Συμφωνείτε με την απάντηση του μαθητή; Εξετάστε με το λογισμικό την ορθότητα του ισχυρισμού του.

5. Θεωρείστε τώρα το τμήμα $\Delta I\perp A\Gamma$. Το σημείο Ι θα είναι εσωτερικό της ΑΓ και διαφορετικό από το σημείο Ζ;

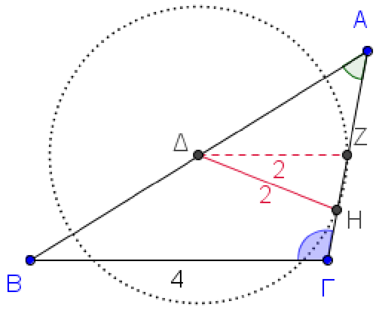
____

____

____

[6] Στα ερωτήματα που ακολουθούν παροτρύνουμε τους μαθητές να παίρνουν διαρκή ανατροφοδότηση από το δόμημα και να τεκμηριώνουν τις απαντήσεις τους με μαθηματικές διαδικασίες απόδειξης.

6. Πώς μπορείτε να αξιοποιήσετε το τμήμα ΔΙ για τους σκοπούς της απόδειξης;



Για την απόδειξη της αναγκαίας συνθήκης του προβλήματος.

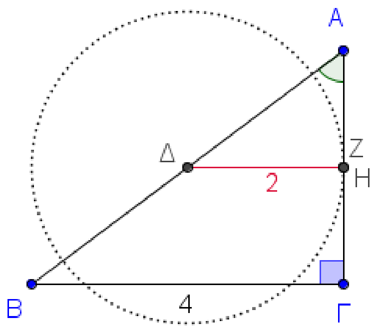
Αναμενόμενες Απαντήσεις:

1. Κατασκευάζουμε τον κύκλο (Δ,ΔΗ). Το πρόβλημα ανάγεται στο να αποδειχθεί ότι ο κύκλος (Δ,ΔΗ) τέμνει την πλευρά ΑΗ σε εσωτερικό σημείο της Ζ.

2. Επειδή είναι: $ΔΗΑ = \hat{Γ} \Rightarrow ΔΗΑ > Α$

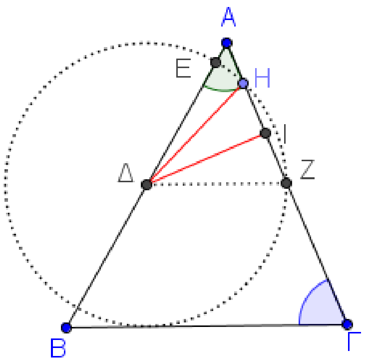
3. ΑΔ>ΔΗ γιατί $ΔΗΑ > Α$

4. Δεν έλαβε υπόψη την περίπτωση η γωνία Γ να είναι αμβλεία.



5η Ερώτηση

5. Ναι γιατί διαφορετικά θα έπρεπε $Α > 90^\circ$ που είναι άτοπο αφού $\hat{Γ} > Α$. Αν το σημείο Ι ταυτίζεται με το σημείο Ζ τότε αφού $ΔΙ \perp ΑΓ$ και ΔΙ//ΒΓ άρα θα πρέπει $\hat{Γ} = 90^\circ$. Επομένως σε αυτή την περίπτωση αν και $\hat{Γ} > Α$ ωστόσο δεν υπάρχει 2^{ο} σημείο Η στην ΑΓ ώστε $ΔΗ = \frac{ΒΓ}{2}$.



6η Ερώτηση

6. Επειδή το ΔΙ είναι το κάθετο τμήμα στην ΑΓ, αρκεί ΙΗ<ΙΑ (ή ΙΖ<ΙΓ) οπότε αρκεί τα αντίστοιχα πλάγια τμήματα να είναι ομοίως άνισα. Δηλαδή αρκεί: ΔΗ<ΔΑ ή ισοδύναμα ΔΕ<ΔΑ που το τελευταίο ισχύει αφού ΑΔ>ΔΗ=ΔΕ. ([7])

7.5 Μαθηματικό υπόβαθρο:

Από την απόδειξη γίνεται σαφές ότι υπάρχει ένας πλούτος νοημάτων και στοιχείων ανακαλυπτικής μάθησης στο παραπάνω Θεώρημα. Ειδικότερα παρατηρούμε ότι οι μαθητές θα πρέπει να αναπτύξουν στρατηγικές απόδειξης αλλά και διερεύνησης, έχοντας ταυτόχρονα δυναμικές αναπαραστάσεις του προβλήματος μέσω του ψηφιακού δομήματος, από το οποίο είναι δυνατό να αντλήσουν ιδέες για την τυπική απόδειξη. Συνοψίζοντας το μαθηματικό υπόβαθρο του σεναρίου εστιάζει στα εξής σημεία:

- Σύγκριση πλευρών και γωνιών σε ένα τρίγωνο

[7] Το συγκεκριμένο βήμα είναι καθοριστικό για την τελική έκβαση της απόδειξης.

- Σύγκριση πλάγιων τμημάτων ως προς μια ευθεία και των αποστάσεων τους από το ίχνος της καθέτου.
- Σύγκριση εξωτερικής γωνίας τριγώνου με τις απέναντι εσωτερικές γωνίες.
- Χρήση του κύκλου ως εργαλείο μέτρησης, σύγκρισης και κατασκευής ευθυγράμμων τμημάτων.
- Απόδειξη ύπαρξης εσωτερικού σημείου σε ευθύγραμμο τμήμα, διαδικασία που κατά κανόνα είναι σύνθετη.
- Διερεύνηση ειδικών περιπτώσεων αλλά και υποπεριπτώσεων του γνωστού Θεωρήματος που αφορά στα μέσα των πλευρών τριγώνου.

Είναι ως εκ τούτου σαφής ο προσανατολισμός του σεναρίου, όσον αφορά τα πυκνά μαθηματικά νοήματα που καλούνται οι μαθητές να ανακαλύψουν αλλά και είναι απαραίτητα για την τυπική απόδειξη των εικασιών τους. Με τον τρόπο αυτό, οι μαθητές αντιλαμβάνονται καθώς δημιουργούνται συνεχείς προκλήσεις από τα πειραματικά ευρήματά τους στο δόμημα, ότι –συχνά- υπάρχει αρκετή απόσταση από τη διατύπωση μιας εικασίας, μέχρι του σημείου αυτή να είναι μια «στέρεη» μαθηματική πρόταση. Υπό αυτή την έννοια, προκαλείται στους μαθητές η «ανάγκη για την τυπική απόδειξη» μιας εικασίας, προκειμένου αυτή να αποτελεί μια τεκμηριωμένη αλήθεια.

Οι μαθητές είναι εύκολο να πειστούν για την εγκυρότητα μιας πρότασης κατόπιν των συνεχών μετασχηματισμών που μπορούν να δημιουργούν μόνοι τους σε περιβάλλοντα DGS (De Villiers, 1993, 2003).

Η μετάβαση από την «εξερευνητική» φάση στην «αφαιρετική» δεν είναι ούτε εύκολη ούτε αυθόρμητη

Τα περιβάλλοντα DGS βοηθούν τους μαθητές ώστε να ανακαλύψουν ή/και να προσδιορίσουν γεωμετρικές ιδιότητες αλλά δεν συμβάλλουν κατ΄ανάγκη και στην ανάπτυξη της αποδεικτικής τους ικανότητας. [Hoyles και Healy (1999)]

Ανησυχία για την εδραίωση της άποψης στους μαθητές για την περιττή παρουσία (ή/και) αξία της απόδειξης. [Pandiscio (2002)]

Επιπρόσθετα, η επιλογή της συγκεκριμένης εργασίας στοχεύει στο να δημιουργήσει την αντίρροπη τάση στην άποψη που συχνά διατυπώνεται ότι “οι δραστηριότητες με Ψ.Τ περιθωριοποιούν τα μαθηματικά”. Στη συγκεκριμένη δραστηριότητα, παρατηρούμε ότι τόσο το εύρος των λεπτομερειών που πρέπει να εξεταστούν είναι ευρύ αλλά ταυτόχρονα, οι μαθητές παίρνουν συνεχή ανατροφοδότηση από τον πειραματισμό τους στο δόμημα, προκειμένου να σχηματοποιήσουν την τυπική απόδειξη με τις απαιτούμενες λεπτομέρειες.

Σχετικά με τις διαδικασίες απόδειξης παραθέτουμε τα αποσπάσματα που ακολουθούν:

- Λαμβάνοντας υπόψη ότι η απόδειξη θεωρείται συχνά ως ένα μέσο για να αποφασίσει κάποιος για την αλήθεια των δηλώσεων (εικασιών), γίνεται ταυτόχρονα ένα μέσο για την εξήγηση των φαινομένων που παρατηρήθηκαν στην οθόνη του υπολογιστή που προκαλούν εντύπωση και έκπληξη (DeVilliers, 1991? Chazan, 1993? Hanna, 1998) (σελ. 289)

- Με τη βοήθεια μιας κατάλληλης ακολουθίας εργασιών σε ένα DGE, η ανάγκη για την απόδειξη δημιουργείται μέσω μιας γνωστικής σύγκρουσης που δημιουργεί στους μαθητές μια πνευματική περιέργεια σχετικά με το γιατί μια απρόσμενη ιδιότητα είναι αληθής (Hadas, Hershkowitz &Schwarz, 2000)