4. példa Az ABC háromszög AB oldalának felezőpontja F, $2 \cdot FCB\angle = FCA\angle$. Milyen határok között változhat a $CFA\angle$ tangense?

Megoldás:

Használjuk a 8.3. ábra jelöléseit!

A feltétel szerint $\alpha \cdot 2 = 2 \cdot FCB\angle = FCA\angle$. A háromszög külső szögére vonatkozó tétel miatt:

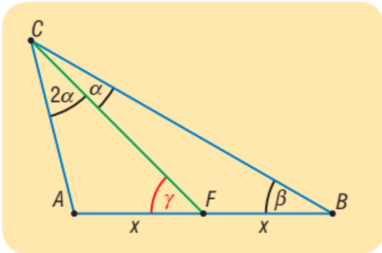
$\beta = \gamma - \alpha$. Nyilvánvaló, hogy

$0 < ACB\angle < 180°$,

$0 < 3\alpha < 180°$,

$0 < \alpha < 60°$.

Legyen $AF = FB = x$!



8.3. ábra $\operatorname{tg}\gamma = ?$

A szinusztétel az AFC háromszögben $\dfrac{x}{AC} = \dfrac{\sin(2\alpha)}{\sin\gamma}$.

A szinusztétel az ABC háromszögben $\dfrac{2x}{AC} = \dfrac{\sin(3\alpha)}{\sin(\gamma-\alpha)}$.

A két egyenletből kapjuk, hogy $\dfrac{2\sin(2\alpha)}{\sin\gamma} = \dfrac{\sin(3\alpha)}{\sin(\gamma-\alpha)}$.

Alkalmazva az addíciós tételeket, és algebrai átalakításokat végezve,

$$\frac{2\sin(2\alpha)}{\sin\alpha\cos(2\alpha)+\cos\alpha\sin(2\alpha)} = \frac{\sin\gamma}{\sin\gamma\cos\alpha - \cos\gamma\sin\alpha},$$

$$\frac{4\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha\left(\cos(2\alpha)+2\cos^2\alpha\right)} = \frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\gamma\cos\alpha - \sin\alpha},$$

$$\frac{4\cos\alpha}{\cos(2\alpha)+2\cos^2\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\gamma\cos\alpha - \sin\alpha},$$

$$\frac{4\cos^2\alpha \cdot \operatorname{tg}\gamma}{\cos(2\alpha)+2\cos^2\alpha} - \frac{4\sin\alpha\cos\alpha}{\cos(2\alpha)+2\cos^2\alpha} = \frac{\left[\cos(2\alpha)+2\cos^2\alpha\right]\cdot\operatorname{tg}\gamma}{\cos(2\alpha)+2\cos^2\alpha},$$

$$\operatorname{tg}\gamma\,\frac{4\cos^2\alpha - \left(\cos(2\alpha)+2\cos^2\alpha\right)}{\cos(2\alpha)+2\cos^2\alpha} = \frac{2\sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)+2\cos^2\alpha},$$

$$\operatorname{tg}\gamma\left[2\cos^2\alpha - \cos(2\alpha).\right] = 2\sin(2\alpha),$$

$$\operatorname{tg}\gamma\left(2\cos^2\alpha - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right) = 2\sin(2\alpha),$$

$$\operatorname{tg}\gamma = 2\sin(2\alpha).$$

Az (1) feltételből következően $0 < 2\alpha < 120°$, így $0 < \operatorname{tg}\gamma \le 2$. Egyenlőség akkor van, ha az $\alpha = 45°$.