

Ficha de Trabalho de Grupo

MATEMÁTICA A - 12º Ano

Julho 2020

Senos e Música Aplicações de funções trigonométricas

1. Neste exercício, vamos construir algumas teclas de um piano de modo a tocar música.

A figura mostra uma parte de um piano, do chamado Dó central ao Dó seguinte. [Em inglês, as notas são designadas por letras maiúsculas A (Lá), B (Si), C (Dó), etc., como se vê na figura.]



Tocar a “mesma” nota, *uma oitava acima*, corresponde a *duplicar a frequência*. Por exemplo, a frequência do “dó central” (o primeiro C da figura) é 261.6256Hz. A frequência do dó, uma oitava acima (o segundo C da figura) é $2 \times 261.6256\text{Hz}$.

[Um piano clássico tem 88 teclas, desde o Lá mais grave (27.5Hz) ao Dó mais agudo (4186.009Hz).]

Para obtermos a frequência de qualquer nota do piano, podemos usar a fórmula

$$f(n) = \left(\sqrt[12]{2} \right)^n \times 261.6256$$

em que n representa o deslocamento da nota relativamente ao Dó central (para a direita ou para a esquerda). Por exemplo, $n = 0$ para o Dó central, $n = 2$ para o Ré da figura, $n = -1$ para o Si imediatamente anterior ao Dó central (que não se vê na figura).

- As frequências estão em progressão geométrica. Qual a razão dessa progressão?
- Vamos introduzir a lista das frequências da escala da imagem na área de Folha de Cálculo do Geogebra. Introduz a frequência do Dó central e usa o facto de as frequências estarem em progressão geométrica para obter todas as outras.

- c) A escala de Dó Maior utiliza apenas as teclas brancas do piano: Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá, Si, Dó.

Vamos querer introduzir na área gráfica do Geogebra funções que permitem tocar as notas correspondentes às teclas brancas. Uma nota pura é obtida a partir de uma função sinusoidal. A altura da nota depende da *frequência*, e a sua intensidade depende da *amplitude*.

Associamos a cada nota uma função sinusoidal $s(t) = a \sin(f \times 2\pi t)$, onde a (amplitude) representa a intensidade e f (frequência) representa a altura da nota.

Utilizando as frequências registadas na folha de cálculo, introduz na linha de input do Geogebra oito funções que representam as notas da escala de Dó Maior. [Não se pretende copiar o valor numérico de cada frequência, mas sim referir as células apropriadas. Tem em atenção a posição das teclas brancas e pretas.]



- d) Vamos simular as teclas do piano em Geogebra usando botões. Usa o botão  para criar oito botões, dando-lhes os nomes das notas correspondentes. A cada botão, associa a acção de tocar a nota respectiva: nas opções do objecto, em “Scripting/On Click”, usa adequadamente o comando `PlaySound`, com uma duração de, por exemplo, 0.2.

[Sugestão: experimenta primeiro o comando `PlaySound` na linha de input do Geogebra, para observar a sua sintaxe]

- e) Que modificação deverias fazer no script de um dado botão, para que a nota respectiva seja tocada com maior ou menor intensidade? Confirma experimentalmente.

2. Se quisermos tocar uma escala mais aguda, só temos de fazer uma pequena mudança na folha de cálculo. Qual?
3. DESAFIO: podes criar também os botões para as teclas pretas e alterar o aspeto e o tamanho de cada botão de forma a que se pareçam e soem mesmo como um teclado do piano.

EXERCÍCIO EXTRA

4. Considera uma função sinusoidal $f(x) = \sin(kx)$. Com $k = 1$, temos a função *seno*. Seja $g(x) = f'(x)$.

a) Com $k = 1$:

- que relação há entre as *amplitudes* de f e de g ?
- que relação há entre os *períodos* de f e de g ?
- que relação há entre as *fases* de f e de g ? Completa a igualdade:

$$\sin(x) = \cos(x + \dots)$$

b) Fazendo variar k , o que acontece à amplitude e ao período de f ?

c) Fazendo agora $k = 2$:

- que relação há entre as *amplitudes* de f e de g ?
- que relação há entre os *períodos* de f e de g ?

d) Supondo $k > 0$, comenta a seguinte afirmação:

A amplitude da derivada de f é inversamente proporcional ao período, e diretamente proporcional ao factor k .

Nota: Conforme a turma que se tem, assim se pode pedir, previamente à atividade, uma pesquisa sobre escalas musicais, sobre as frequências de algumas notas musicais e sua representação nas teclas de um piano.