

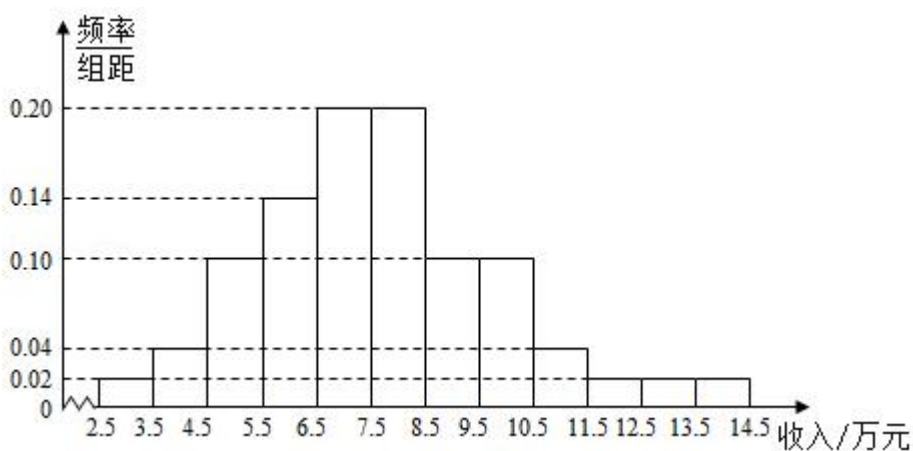
2021 年全国统一高考数学试卷（理科）（甲卷）

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. (5 分) 设集合 $M = \{x | 0 < x < 4\}$, $N = \{x | \frac{1}{3} \leq x \leq 5\}$, 则 $M \cap N =$ ()

- A. $\{x | 0 < x \leq \frac{1}{3}\}$ B. $\{x | \frac{1}{3} \leq x < 4\}$ C. $\{x | 4 \leq x < 5\}$ D. $\{x | 0 < x \leq 5\}$

2. (5 分) 为了解某地农村经济情况，对该地农户家庭年收入进行抽样调查，将农户家庭年收入的调查数据整理得到如下频率分布直方图：



根据此频率分布直方图，下面结论中不正确的是 ()

- A. 该地农户家庭年收入低于 4.5 万元的农户比率估计为 6%
- B. 该地农户家庭年收入不低于 10.5 万元的农户比率估计为 10%
- C. 估计该地农户家庭年收入的平均值不超过 6.5 万元
- D. 估计该地有一半以上的农户，其家庭年收入介于 4.5 万元至 8.5 万元之间
3. (5 分) 已知 $(1 - i)^2 z = 3 + 2i$, 则 $z =$ ()
- A. $-1 - \frac{3}{2}i$ B. $-1 + \frac{3}{2}i$ C. $-\frac{3}{2} + i$ D. $-\frac{3}{2} - i$
4. (5 分) 青少年视力是社会普遍关注的问题，视力情况可借助视力表测量。通常用五分记录法和小数记录法记录视力数据，五分记录法的数据 L 和小数记录法的数据 V 满足 $L = 5 + \lg V$ 。已知某同学视力的五分记录法的数据为 4.9，则其视力的小数记录法的数据约为 () ($10^{\frac{1}{10}} \approx 1.259$)
- A. 1.5 B. 1.2 C. 0.8 D. 0.6
5. (5 分) 已知 F_1, F_2 是双曲线 C 的两个焦点， P 为 C 上一点，且 $\angle F_1 P F_2 = 60^\circ$, $|P F_1|$

$=3|PF_2|$ ，则 C 的离心率为 ()

- A. $\frac{\sqrt{7}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{13}}{2}$ C. $\sqrt{7}$ D. $\sqrt{13}$

6. (5 分) 在一个正方体中，过顶点 A 的三条棱的中点分别为 E, F, G 。该正方体截去三棱锥 $A-EFG$ 后，所得多面体的三视图中，正视图如图所示，则相应的侧视图是 ()



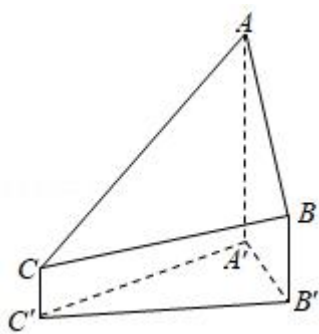
正视图

- A. B. C. D.

7. (5 分) 等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ，前 n 项和为 S_n 。设甲： $q > 0$ ，乙： $\{S_n\}$ 是递增数列，则 ()

- A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件
B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件
C. 甲是乙的充要条件
D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

8. (5 分) 2020 年 12 月 8 日，中国和尼泊尔联合公布珠穆朗玛峰最新高程为 8848.86 (单位： m)，三角高程测量法是珠峰高程测量方法之一。如图是三角高程测量法的一个示意图，现有 A, B, C 三点，且 A, B, C 在同一水平面上的投影 A', B', C' 满足 $\angle A'C'B' = 45^\circ$ ， $\angle A'B'C' = 60^\circ$ 。由 C 点测得 B 点的仰角为 15° ， BB' 与 CC' 的差为 100；由 B 点测得 A 点的仰角为 45° ，则 A, C 两点到水平面 $A'B'C'$ 的高度差 $AA' - CC'$ 约为 () ($\sqrt{3} \approx 1.732$)



- A. 346 B. 373 C. 446 D. 473

9. (5 分) 若 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ ， $\tan 2\alpha = \frac{\cos \alpha}{2 - \sin \alpha}$ ，则 $\tan \alpha =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{15}}{15}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{15}}{3}$

10. (5分) 将4个1和2个0随机排成一行, 则2个0不相邻的概率为()

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{4}{5}$

11. (5分) 已知A, B, C是半径为1的球O的球面上的三个点, 且 $AC \perp BC$, $AC=BC=1$, 则三棱锥O-ABC的体积为()

- A. $\frac{\sqrt{2}}{12}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{12}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

12. (5分) 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(x+1)$ 为奇函数, $f(x+2)$ 为偶函数, 当 $x \in [1, 2]$ 时, $f(x) = ax^2 + b$. 若 $f(0) + f(3) = 6$, 则 $f(\frac{9}{2}) =$ ()

- A. $-\frac{9}{4}$ B. $-\frac{3}{2}$ C. $\frac{7}{4}$ D. $\frac{5}{2}$

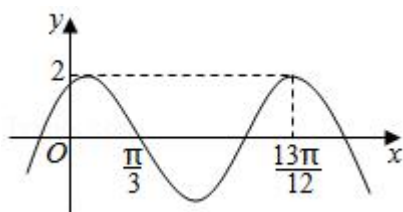
二、填空题: 本题共4小题, 每小题5分, 共20分。

13. (5分) 曲线 $y = \frac{2x-1}{x+2}$ 在点 $(-1, -3)$ 处的切线方程为_____.

14. (5分) 已知向量 $\vec{a} = (3, 1)$, $\vec{b} = (1, 0)$, $\vec{c} = \vec{a} + k\vec{b}$. 若 $\vec{a} \perp \vec{c}$, 则 $k =$ _____.

15. (5分) 已知 F_1, F_2 为椭圆 $C: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的两个焦点, P, Q 为 C 上关于坐标原点对称的两点, 且 $|PQ| = |F_1F_2|$, 则四边形 PF_1QF_2 的面积为_____.

16. (5分) 已知函数 $f(x) = 2\cos(\omega x + \varphi)$ 的部分图像如图所示, 则满足条件 $(f(x) - f(-\frac{7\pi}{4})) (f(x) - f(\frac{4\pi}{3})) > 0$ 的最小正整数 x 为_____.



三、解答题: 共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17~21题为必考题, 每个试题考生都必须作答。第22、23题为选考题, 考生根据要求作答。(一) 必考题: 共60分。

17. (12分) 甲、乙两台机床生产同种产品, 产品按质量分为一级品和二级品, 为了比较两台机床产品的质量, 分别用两台机床各生产了200件产品, 产品的质量情况统计如下表:

	一级品	二级品	合计
甲机床	150	50	200
乙机床	120	80	200
合计	270	130	400

(1) 甲机床、乙机床生产的产品中一级品的频率分别是多少？

(2) 能否有 99% 的把握认为甲机床的产品质量与乙机床的产品质量有差异？

$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}.$$

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

18. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 从下面①②③中选取两个作为条件, 证明另外一个成立.

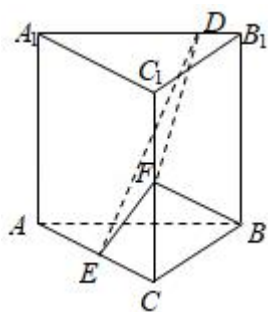
① 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列; ② 数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是等差数列; ③ $a_2 = 3a_1$.

注: 若选择不同的组合分别解答, 则按第一个解答计分.

19. (12 分) 已知直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 侧面 AA_1B_1B 为正方形, $AB = BC = 2$, E, F 分别为 AC 和 CC_1 的中点, D 为棱 A_1B_1 上的点, $BF \perp A_1B_1$.

(1) 证明: $BF \perp DE$;

(2) 当 B_1D 为何值时, 面 BB_1C_1C 与面 DFE 所成的二面角的正弦值最小?



20. (12 分) 抛物线 C 的顶点为坐标原点 O , 焦点在 x 轴上, 直线 $l: x=1$ 交 C 于 P, Q 两点, 且 $OP \perp OQ$. 已知点 $M(2, 0)$, 且 $\odot M$ 与 l 相切.

(1) 求 $C, \odot M$ 的方程;

(2) 设 A_1, A_2, A_3 是 C 上的三个点, 直线 A_1A_2, A_1A_3 均与 $\odot M$ 相切. 判断直线 A_2A_3 与 $\odot M$ 的位置关系, 并说明理由.

21. (12 分) 已知 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 函数 $f(x) = \frac{x^a}{a^x}$ ($x > 0$).

(1) 当 $a = 2$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = 1$ 有且仅有两个交点, 求 a 的取值范围.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

22. (10 分) 在直角坐标系 xOy 中, 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 2\sqrt{2}\cos\theta$.

(1) 将 C 的极坐标方程化为直角坐标方程;

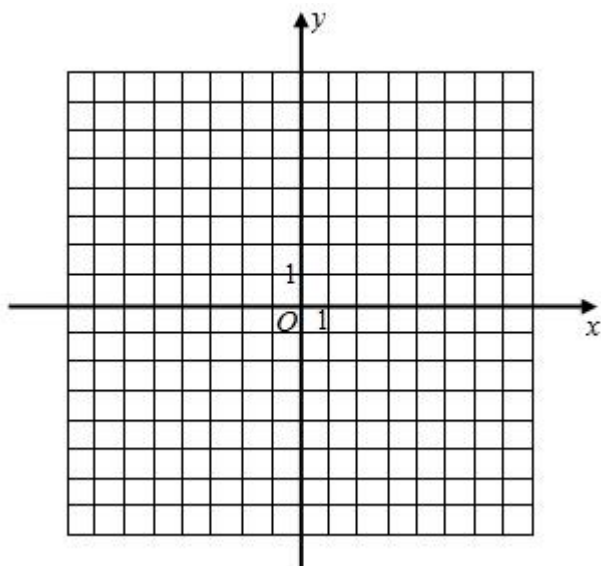
(2) 设点 A 的直角坐标为 $(1, 0)$, M 为 C 上的动点, 点 P 满足 $\overrightarrow{AP} = \sqrt{2}\overrightarrow{AM}$, 写出 P 的轨迹 C_1 的参数方程, 并判断 C 与 C_1 是否有公共点.

[选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

23. 已知函数 $f(x) = |x - 2|$, $g(x) = |2x + 3| - |2x - 1|$.

(1) 画出 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 的图像;

(2) 若 $f(x+a) \geq g(x)$, 求 a 的取值范围.



2021 年全国统一高考数学试卷（理科）（甲卷）

参考答案与试题解析

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. (5 分) 设集合 $M = \{x | 0 < x < 4\}$, $N = \{x | \frac{1}{3} \leq x \leq 5\}$, 则 $M \cap N =$ ()

- A. $\{x | 0 < x \leq \frac{1}{3}\}$ B. $\{x | \frac{1}{3} \leq x < 4\}$ C. $\{x | 4 \leq x < 5\}$ D. $\{x | 0 < x \leq 5\}$

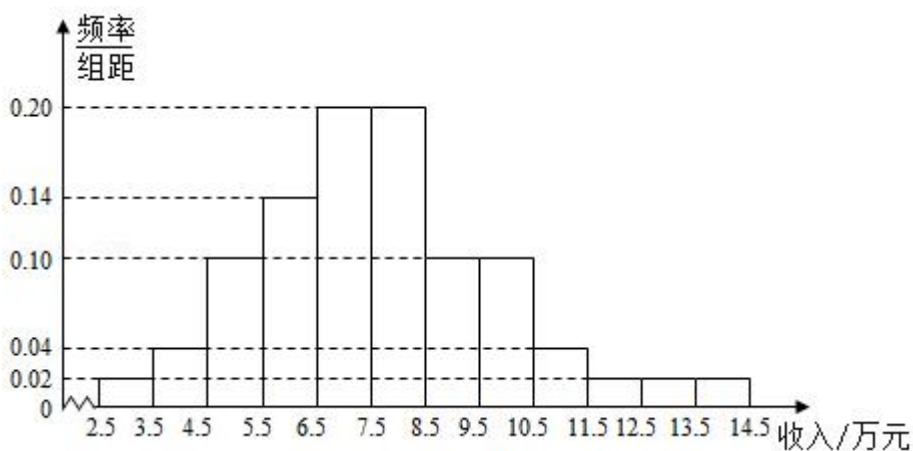
【分析】直接利用交集运算求解.

【解答】解：集合 $M = \{x | 0 < x < 4\}$, $N = \{x | \frac{1}{3} \leq x \leq 5\}$, 则 $M \cap N = \{x | \frac{1}{3} \leq x < 4\}$,

故选：B.

【点评】本题考查了交集及其运算，是基础题.

2. (5 分) 为了解某地农村经济情况，对该地农户家庭年收入进行抽样调查，将农户家庭年收入的调查数据整理得到如下频率分布直方图：



根据此频率分布直方图，下面结论中不正确的是 ()

- A. 该地农户家庭年收入低于 4.5 万元的农户比率估计为 6%
B. 该地农户家庭年收入不低于 10.5 万元的农户比率估计为 10%
C. 估计该地农户家庭年收入的平均值不超过 6.5 万元
D. 估计该地有一半以上的农户，其家庭年收入介于 4.5 万元至 8.5 万元之间

【分析】利用频率分布直方图中频率的求解方法，通过求解频率即可判断选项 A, B, D, 利用平均值的计算方法，即可判断选项 C.

【解答】解：对于 A，该地农户家庭年收入低于 4.5 万元的农户比率为 $(0.02+0.04) \times 1$

$=0.06=6\%$ ，故选项 A 正确；

对于 B ，该地农户家庭年收入不低于 10.5 万元的农户比率为 $(0.04+0.02\times 3)\times 1=0.1=10\%$ ，故选项 B 正确；

对于 C ，估计该地农户家庭年收入的平均值为 $3\times 0.02+4\times 0.04+5\times 0.1+6\times 0.14+7\times 0.2+8\times 0.2+9\times 0.1+10\times 0.1+11\times 0.04+12\times 0.02+13\times 0.02+14\times 0.02=7.68>6.5$ 万元，故选项 C 错误；

对于 D ，家庭年收入介于 4.5 万元至 8.5 万元之间的频率为 $(0.1+0.14+0.2+0.2)\times 1=0.64>0.5$ ，

故估计该地有一半以上的农户，其家庭年收入介于 4.5 万元至 8.5 万元之间，故选项 D 正确。

故选：C。

【点评】 本题考查了频率分布直方图的应用，解题的关键是掌握频率分布直方图中频率的求解方法以及平均数的计算方法，属于基础题。

3. (5 分) 已知 $(1-i)^2 z=3+2i$ ，则 $z=(\quad)$

- A. $-1-\frac{3}{2}i$ B. $-1+\frac{3}{2}i$ C. $-\frac{3}{2}+i$ D. $-\frac{3}{2}-i$

【分析】 利用复数的乘法运算法则以及除法的运算法则进行求解即可。

【解答】 解：因为 $(1-i)^2 z=3+2i$ ，

$$\text{所以 } z = \frac{3+2i}{(1-i)^2} = \frac{3+2i}{-2i} = \frac{(3+2i)i}{(-2i)\cdot i} = \frac{-2+3i}{2} = -1+\frac{3}{2}i.$$

故选：B。

【点评】 本题考查了复数的运算，主要考查了复数的乘法运算法则以及除法的运算法则的运用，考查了运算能力，属于基础题。

4. (5 分) 青少年视力是社会普遍关注的问题，视力情况可借助视力表测量。通常用五分记录法和小数记录法记录视力数据，五分记录法的数据 L 和小数记录法的数据 V 满足 $L=5+\lg V$ 。已知某同学视力的五分记录法的数据为 4.9，则其视力的小数记录法的数据约为 $(\quad)$ ($10^{\sqrt{10}}\approx 1.259$)

- A. 1.5 B. 1.2 C. 0.8 D. 0.6

【分析】 把 $L=4.9$ 代入 $L=5+\lg V$ 中，直接求解即可。

【解答】 解：在 $L=5+\lg V$ 中， $L=4.9$ ，所以 $4.9=5+\lg V$ ，即 $\lg V=-0.1$ ，

$$\text{解得 } V=10^{-0.1}=\frac{1}{10^{0.1}}=\frac{1}{\sqrt[10]{10}}=\frac{1}{1.259}\approx 0.8,$$

所以其视力的小数记录法的数据约为 0.8.

故选: C.

【点评】 本题考查了对数与指数的互化问题, 也考查了运算求解能力, 是基础题.

5. (5 分) 已知 F_1, F_2 是双曲线 C 的两个焦点, P 为 C 上一点, 且 $\angle F_1PF_2=60^\circ$, $|PF_1|=3|PF_2|$, 则 C 的离心率为 ()

- A. $\frac{\sqrt{7}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{13}}{2}$ C. $\sqrt{7}$ D. $\sqrt{13}$

【分析】 设出 $|PF_1|=3m$, $|PF_2|=m$, 由双曲线的定义可得 $m=a$, 再通过 $\angle F_1PF_2=60^\circ$, 由余弦定理列出方程, 即可求解双曲线的离心率.

【解答】 解: F_1, F_2 为双曲线 C 的两个焦点, P 是 C 上的一点, $|PF_1|=3|PF_2|$,

设 $|PF_1|=3m$, $|PF_2|=m$, 由双曲线的定义可得 $|PF_1|-|PF_2|=2m=2a$, 即 $m=a$,

所以 $|PF_1|=3a$, $|PF_2|=a$, 因为 $\angle F_1PF_2=60^\circ$, $|F_1F_2|=2c$,

所以 $4c^2=9a^2+a^2-2\times 3a\times a\times \cos 60^\circ$, 整理得 $4c^2=7a^2$,

$$\text{所以 } e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{2}.$$

故选: A.

【点评】 本题考查双曲线的简单性质的应用, 考查方程思想、转化思想与运算求解能力, 属于中档题.

6. (5 分) 在一个正方体中, 过顶点 A 的三条棱的中点分别为 E, F, G . 该正方体截去三棱锥 $A-EFG$ 后, 所得多面体的三视图中, 正视图如图所示, 则相应的侧视图是 ()



正视图

- A. B. C. D.

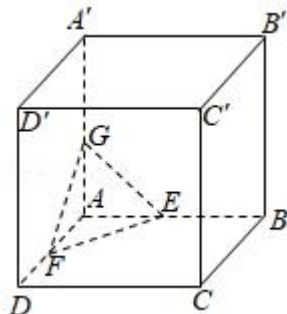
【分析】 作出正方体, 截去三棱锥 $A-EFG$, 根据正视图, 摆放好正方体, 即可求解侧视图.

【解答】 解: 由题意, 作出正方体, 截去三棱锥 $A-EFG$, 根据正视图,

可得 $A - EFG$ 在正方体左侧面，如图，根据三视图的投影，

可得相应的侧视图是 D 图形，

故选： D .



【点评】 本题考查简单空间图形的三视图，属基础题.

7. (5 分) 等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ，前 n 项和为 S_n . 设甲： $q > 0$ ，乙： $\{S_n\}$ 是递增数列，则 ()

- A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件
- B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件
- C. 甲是乙的充要条件
- D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

【分析】 根据等比数列的求和公式和充分条件和必要条件的定义即可求出.

【解答】 解：若 $a_1 = -1$ ， $q = 1$ ，则 $S_n = na_1 = -n$ ，则 $\{S_n\}$ 是递减数列，不满足充分性；

$$\because S_n = \frac{a_1}{1-q} (1 - q^n),$$

$$\text{则 } S_{n+1} = \frac{a_1}{1-q} (1 - q^{n+1}),$$

$$\therefore S_{n+1} - S_n = \frac{a_1}{1-q} (q^n - q^{n+1}) = a_1 q^n,$$

若 $\{S_n\}$ 是递增数列，

$$\therefore S_{n+1} - S_n = a_1 q^n > 0,$$

则 $a_1 > 0$ ， $q > 0$ ，

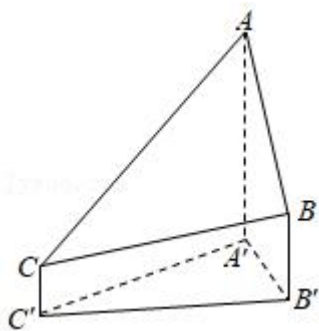
$\therefore$ 满足必要性，

故甲是乙的必要条件但不是充分条件，

故选： B .

【点评】本题主要考查数列的函数特性，充分条件和必要条件，属于中档题.

8. (5分) 2020年12月8日，中国和尼泊尔联合公布珠穆朗玛峰最新高程为8848.86(单位： m)，三角高程测量法是珠峰高程测量方法之一. 如图是三角高程测量法的一个示意图，现有 A, B, C 三点，且 A, B, C 在同一水平面上的投影 A', B', C' 满足 $\angle A'C'B'=45^\circ$ ， $\angle A'B'C'=60^\circ$. 由 C 点测得 B 点的仰角为 15° ， BB' 与 CC' 的差为100；由 B 点测得 A 点的仰角为 45° ，则 A, C 两点到水平面 $A'B'C'$ 的高度差 $AA' - CC'$ 约为() ($\sqrt{3} \approx 1.732$)



- A. 346 B. 373 C. 446 D. 473

【分析】本题要注意各个三角形不共面，在每个三角形中利用正弦定理求边长，进而找到高度差.

【解答】解：过 C 作 $CH \perp BB'$ 于 H ，过 B 作 $BM \perp AA'$ 于 M ，

则 $\angle BCH=15^\circ$ ， $BH=100$ ， $\angle ABM=45^\circ$ ， $CH=C'B'$ ， $A'B'=BM=AM$ ， $BB'=MA'$ ， $\angle C'A'B'=75^\circ$

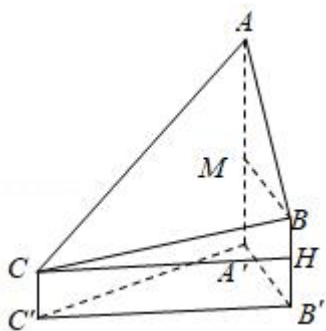
$$\therefore \tan \angle BCH = \tan 15^\circ = \tan (45^\circ - 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 30^\circ} = 2 - \sqrt{3}, \quad \sin 75^\circ = \sin (45^\circ + 30^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \right)$$

$$\text{则在 Rt}\triangle BCH \text{ 中, } CH = \frac{BH}{\tan \angle BCH} = 100(2 + \sqrt{3}), \therefore C'B' = 100(2 + \sqrt{3})$$

$$\text{在 } \triangle A'B'C' \text{ 中, 由正弦定理知, } A'B' = \frac{C'B'}{\sin \angle C'A'B'} \cdot \sin \angle A'C'B' = 100(\sqrt{3} + 1), \therefore AM = 100(\sqrt{3} + 1),$$

$$\therefore AA' - CC' = AM + BH = 100(\sqrt{3} + 1) + 100 \approx 373,$$

故选：B.



【点评】理解仰角的概念，各个三角形不共面，因此做好辅助线是关键.

9. (5分) 若 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\tan 2\alpha = \frac{\cos \alpha}{2 - \sin \alpha}$, 则 $\tan \alpha =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{15}}{15}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{15}}{3}$

【分析】把等式左边化切为弦，再展开倍角公式，求解 $\sin \alpha$ ，进一步求得 $\cos \alpha$ ，再由商的关系可得 $\tan \alpha$ 的值.

【解答】解：由 $\tan 2\alpha = \frac{\cos \alpha}{2 - \sin \alpha}$ ，得 $\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{\cos \alpha}{2 - \sin \alpha}$ ，

$$\text{即 } \frac{2\sin \alpha \cos \alpha}{1 - 2\sin^2 \alpha} = \frac{\cos \alpha}{2 - \sin \alpha},$$

$$\because \alpha \in (0, \frac{\pi}{2}), \therefore \cos \alpha \neq 0,$$

$$\text{则 } 2\sin \alpha (2 - \sin \alpha) = 1 - 2\sin^2 \alpha, \text{ 解得 } \sin \alpha = \frac{1}{4},$$

$$\text{则 } \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{\sqrt{15}}{4},$$

$$\therefore \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{15}.$$

故选：A.

【点评】本题考查三角函数的恒等变换与化简求值，考查倍角公式的应用，是基础题.

10. (5分) 将 4 个 1 和 2 个 0 随机排成一行，则 2 个 0 不相邻的概率为 ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{4}{5}$

【分析】分别计算出 4 个 1 和 2 个 0 随机排成一行的种数以及 2 个 0 不相邻的种数，然后由古典概型的概率公式求解即可.

【解答】解：4 个 1 和 2 个 0 随机排成一行，共有 $\frac{A_6^6}{A_4^4 A_2^2} = 15$ 种，

2 个 0 不相邻，先将 4 个 1 全排列，再用插空法将 2 个 0 放入共有 $C_5^2=10$ 种，

故 2 个 0 不相邻的概率为 $\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$.

故选：C.

【点评】 本题考查了古典概型概率公式的应用，排列组合的应用，对于不相邻问题，一般会运用插空法进行求解，属于基础题.

11. (5 分) 已知 A, B, C 是半径为 1 的球 O 的球面上的三个点，且 $AC \perp BC$, $AC=BC=1$ ，则三棱锥 $O-ABC$ 的体积为 ()

A. $\frac{\sqrt{2}}{12}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{12}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

【分析】 先确定 $\triangle ABC$ 所在的截面圆的圆心 O_1 为斜边 AB 的中点，然后在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 和 $\text{Rt}\triangle AOO_1$ 中，利用勾股定理求出 OO_1 ，再利用锥体的体积公式求解即可.

【解答】 解：因为 $AC \perp BC$, $AC=BC=1$,

所以底面 ABC 为等腰直角三角形，

所以 $\triangle ABC$ 所在的截面圆的圆心 O_1 为斜边 AB 的中点，

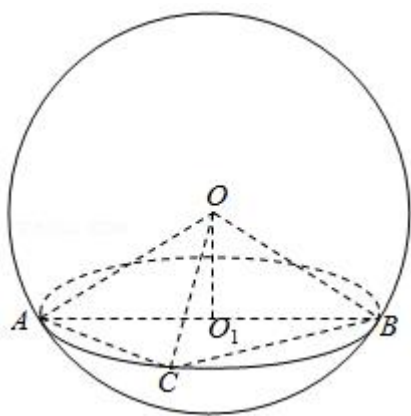
所以 $OO_1 \perp$ 平面 ABC ,

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{2}$ ，则 $AO_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

在 $\text{Rt}\triangle AOO_1$ 中， $OO_1=\sqrt{OA^2-AO_1^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

故三棱锥 $O-ABC$ 的体积为 $V=\frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot OO_1=\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{12}$.

故选：A.



【点评】 本题考查了锥体外接球和锥体体积公式，解题的关键是确定 $\triangle ABC$ 所在圆的圆心的位置，考查了逻辑推理能力、化简运算能力、空间想象能力，属于中档题.

12. (5分) 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(x+1)$ 为奇函数, $f(x+2)$ 为偶函数, 当 $x \in [1, 2]$ 时, $f(x) = ax^2 + b$. 若 $f(0) + f(3) = 6$, 则 $f(\frac{9}{2}) =$ ()

- A. $-\frac{9}{4}$ B. $-\frac{3}{2}$ C. $\frac{7}{4}$ D. $\frac{5}{2}$

【分析】由 $f(x+1)$ 为奇函数, $f(x+2)$ 为偶函数, 可求得 $f(x)$ 的周期为 4, 由 $f(x+1)$ 为奇函数, 可得 $f(1) = 0$, 结合 $f(0) + f(3) = 6$, 可求得 a, b 的值, 从而得到 $x \in [1, 2]$ 时, $f(x)$ 的解析式, 再利用周期性可得 $f(\frac{9}{2}) = f(\frac{1}{2}) = -f(\frac{3}{2})$, 进一步求出 $f(\frac{9}{2})$ 的值.

【解答】解: $\because f(x+1)$ 为奇函数, $\therefore f(1) = 0$, 且 $f(x+1) = -f(-x+1)$,

$\because f(x+2)$ 偶函数, $\therefore f(x+2) = f(-x+2)$,

$\therefore f[(x+1)+1] = -f[-(x+1)+1] = -f(-x)$, 即 $f(x+2) = -f(-x)$,

$\therefore f(-x+2) = f(x+2) = -f(-x)$.

令 $t = -x$, 则 $f(t+2) = -f(t)$,

$\therefore f(t+4) = -f(t+2) = f(t)$, $\therefore f(x+4) = f(x)$.

当 $x \in [1, 2]$ 时, $f(x) = ax^2 + b$.

$f(0) = f(-1+1) = -f(2) = -4a - b$,

$f(3) = f(1+2) = f(-1+2) = f(1) = a + b$,

又 $f(0) + f(3) = 6$, $\therefore -3a = 6$, 解得 $a = -2$,

$\because f(1) = a + b = 0$, $\therefore b = -a = 2$,

$\therefore$ 当 $x \in [1, 2]$ 时, $f(x) = -2x^2 + 2$,

$\therefore f(\frac{9}{2}) = f(\frac{1}{2}) = -f(\frac{3}{2}) = -(-2 \times \frac{9}{4} + 2) = \frac{5}{2}$.

故选: D.

【点评】本题主要考查函数的奇偶性与周期性, 考查转化思想与运算求解能力, 属于中档题.

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. (5分) 曲线 $y = \frac{2x-1}{x+2}$ 在点 $(-1, -3)$ 处的切线方程为 $5x - y + 2 = 0$.

【分析】先求导, 利用导数的几何意义可求出切线的斜率, 再由点斜式即可求得切线方程.

【解答】解：因为 $y = \frac{2x-1}{x+2}$, $(-1, -3)$ 在曲线上,

$$\text{所以 } y' = \frac{2(x+2) - (2x-1)}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2},$$

所以 $y'|_{x=-1} = 5$,

则曲线 $y = \frac{2x-1}{x+2}$ 在点 $(-1, -3)$ 处的切线方程为:

$$y - (-3) = 5[x - (-1)], \text{ 即 } 5x - y + 2 = 0.$$

故答案为: $5x - y + 2 = 0$.

【点评】本题主要考查导数的几何意义, 考查运算求解能力, 属于基础题.

14. (5分) 已知向量 $\vec{a} = (3, 1)$, $\vec{b} = (1, 0)$, $\vec{c} = \vec{a} + k\vec{b}$. 若 $\vec{a} \perp \vec{c}$, 则 $k = -\frac{10}{3}$.

【分析】利用向量数量积的运算性质结合向量垂直的坐标表示, 列出关于 k 的方程, 求解即可.

【解答】解: 因为向量 $\vec{a} = (3, 1)$, $\vec{b} = (1, 0)$, $\vec{c} = \vec{a} + k\vec{b}$,

$$\text{由 } \vec{a} \perp \vec{c}, \text{ 则 } \vec{a} \cdot (\vec{a} + k\vec{b}) = |\vec{a}|^2 + k\vec{a} \cdot \vec{b} = 3^2 + 1^2 + k \cdot (3 \times 1 + 1 \times 0) = 10 + 3k = 0,$$

$$\text{解得 } k = -\frac{10}{3}.$$

$$\text{故答案为: } -\frac{10}{3}.$$

【点评】本题考查了平面向量的坐标运算, 涉及了平面向量数量积的运算性质, 平面向量垂直的坐标表示, 考查了运算能力, 属于基础题.

15. (5分) 已知 F_1, F_2 为椭圆 $C: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的两个焦点, P, Q 为 C 上关于坐标原点对称的两点, 且 $|PQ| = |F_1F_2|$, 则四边形 PF_1QF_2 的面积为 8.

【分析】判断四边形 PF_1QF_2 为矩形, 利用椭圆的定义及勾股定理求解即可.

【解答】解: 因为 P, Q 为 C 上关于坐标原点对称的两点, 且 $|PQ| = |F_1F_2|$,

所以四边形 PF_1QF_2 为矩形,

$$\text{设 } |PF_1| = m, |PF_2| = n,$$

$$\text{由椭圆的定义可得 } |PF_1| + |PF_2| = m + n = 2a = 8,$$

$$\text{所以 } m^2 + 2mn + n^2 = 64,$$

$$\text{因为 } |PF_1|^2 + |PF_2|^2 = |F_1F_2|^2 = 4c^2 = 4(a^2 - b^2) = 48,$$

$$\text{即 } m^2 + n^2 = 48,$$

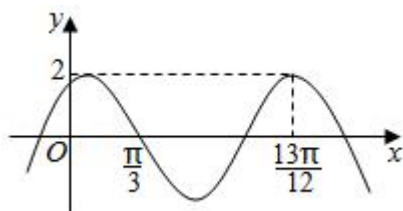
所以 $mn=8$,

所以四边形 PF_1QF_2 的面积为 $|PF_1||PF_2|=mn=8$.

故答案为: 8.

【点评】 本题主要考查椭圆的性质, 椭圆的定义, 考查方程思想与运算求解能力, 属于中档题.

16. (5分) 已知函数 $f(x) = 2\cos(\omega x + \varphi)$ 的部分图像如图所示, 则满足条件 $(f(x) - f(-\frac{7\pi}{4}))(f(x) - f(\frac{4\pi}{3})) > 0$ 的最小正整数 x 为 2.



【分析】 观察图像, $\frac{3}{4}T = \frac{13\pi}{12} - \frac{\pi}{3}$, 即周期为 π , 将需要求解的式子进行周期变换, 变换到 $\frac{\pi}{3}$ 附近, 观察图像可知 $x > \frac{\pi}{3}$, 即最小正整数为 2.

【解答】 解: 由图像可得 $\frac{3}{4}T = \frac{13}{12}\pi - \frac{\pi}{3}$, 即周期为 π ,

$$\because (f(x) - f(-\frac{7\pi}{4}))(f(x) - f(\frac{4\pi}{3})) > 0, T = \pi,$$

$$\therefore (f(x) - f(\frac{\pi}{4}))(f(x) - f(\frac{\pi}{3})) > 0,$$

观察图像可知当 $x > \frac{\pi}{3}$,

$$f(x) < f(\frac{\pi}{4}), f(x) < f(\frac{\pi}{3}),$$

$$\because 2 \in (\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}), \text{ 且 } f(\frac{5\pi}{6}) = 0,$$

$\therefore x=2$ 时最小, 且满足题意,

故答案为: 2.

【点评】 该题考查了三角函数的周期性, 以及如何通过图像判断函数值的大小, 题型灵活, 属于中等题.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答. (一) 必考题: 共 60 分.

17. (12 分) 甲、乙两台机床生产同种产品，产品按质量分为一级品和二级品，为了比较两台机床产品的质量，分别用两台机床各生产了 200 件产品，产品的质量情况统计如下表：

	一级品	二级品	合计
甲机床	150	50	200
乙机床	120	80	200
合计	270	130	400

- (1) 甲机床、乙机床生产的产品中一级品的频率分别是多少？
 (2) 能否有 99% 的把握认为甲机床的产品质量与乙机床的产品质量有差异？

附： $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$.

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

- 【分析】(1) 根据表格中统计可知甲机床、乙机床生产总数和频数，再求出频率值即可；
 (2) 根据 2×2 列联表，求出 K^2 ，再将 K^2 的值与 6.635 比较，即可得出结论；

【解答】解：由题意，可得甲机床、乙机床生产总数均为 200 件，

因为甲的一级品的频数为 150，所以甲的一级品的频率为 $\frac{150}{200} = \frac{3}{4}$ ；

因为乙的一级品的频数为 120，所以乙的一级品的频率为 $\frac{120}{200} = \frac{3}{5}$ ；

(2) 根据 2×2 列联表，可得 $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$
 $= \frac{400(150 \times 80 - 50 \times 120)^2}{270 \times 130 \times 200 \times 200} \approx 10.256 > 6.635$.

所以有 99% 的把握认为甲机床的产品质量与乙机床的产品质量有差异.

【点评】本题考查了统计与概率中的独立性检验，属于基础题.

18. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，从下面①②③中选取两个作为条件，证明另外一个成立.

- ① 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列；② 数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是等差数列；③ $a_2 = 3a_1$.

注：若选择不同的组合分别解答，则按第一个解答计分.

【分析】首先确定条件和结论，然后结合等差数列的通项公式和前 n 项和公式证明结论即可.

【解答】解：选择①③为条件，②结论.

证明过程如下：

由题意可得： $a_2 = a_1 + d = 3a_1$ ， $\therefore d = 2a_1$ ，

数列的前 n 项和： $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = na_1 + \frac{n(n-1)}{2} \times 2a_1 = n^2 a_1$ ，

故 $\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}} = n\sqrt{a_1} - (n-1)\sqrt{a_1} = \sqrt{a_1}$ ($n \geq 2$)，

据此可得数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是等差数列.

选择①②为条件，③结论：

设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，则：

$$\sqrt{S_1} = \sqrt{a_1}, \sqrt{S_2} = \sqrt{a_1 + (a_1 + d)} = \sqrt{2a_1 + d}, \sqrt{S_3} = \sqrt{a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d)} = \sqrt{3(a_1 + d)}$$

,

数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 为等差数列，则： $\sqrt{S_1} + \sqrt{S_3} = 2\sqrt{S_2}$ ，

即： $(\sqrt{a_1} + \sqrt{3(a_1 + d)})^2 = (2\sqrt{2a_1 + d})^2$ ，整理可得： $d = 2a_1$ ， $\therefore a_2 = a_1 + d = 3a_1$.

选择③②为条件，①结论：

由题意可得： $S_2 = a_1 + a_2 = 4a_1$ ， $\therefore \sqrt{S_2} = 2\sqrt{a_1}$ ，

则数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 的公差为 $d = \sqrt{S_2} - \sqrt{S_1} = \sqrt{a_1}$ ，

通项公式为： $\sqrt{S_n} = \sqrt{S_1} + (n-1)d = n\sqrt{a_1}$ ，

据此可得，当 $n \geq 2$ 时， $a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 a_1 - (n-1)^2 a_1 = (2n-1)a_1$ ，

当 $n=1$ 时上式也成立，故数列的通项公式为： $a_n = (2n-1)a_1$ ，

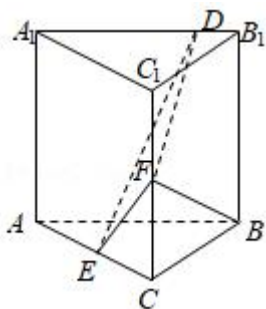
由 $a_{n+1} - a_n = [2(n+1) - 1]a_1 - (2n-1)a_1 = 2a_1$ ，可知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列.

【点评】本题主要考查等差数列的判定与证明，等差数列的通项公式，等差数列的前 n 项和公式等知识，属于中等题.

19. (12 分) 已知直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中，侧面 AA_1B_1B 为正方形， $AB = BC = 2$ ， E ， F 分别为 AC 和 CC_1 的中点， D 为棱 A_1B_1 上的点， $BF \perp A_1B_1$.

(1) 证明： $BF \perp DE$ ；

(2) 当 B_1D 为何值时，面 BB_1C_1C 与面 DFE 所成的二面角的正弦值最小？



【分析】(1) 连接 AF ，易知 $CF=1$ ， $BF=\sqrt{5}$ ，由 $BF \perp A_1B_1$ ， $BF \perp AB$ ，再利用勾股定理求得 AF 和 AC 的长，从而证明 $BA \perp BC$ ，然后以 B 为原点建立空间直角坐标系，证得 $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{DE} = 0$ ，即可；

(2) 易知平面 BB_1C_1C 的一个法向量为 $\vec{p} = (1, 0, 0)$ ，求得平面 DEF 的法向量 $\vec{n}$ ，再由空间向量的数量积可得 $\cos \langle \vec{p}, \vec{n} \rangle = \frac{3}{\sqrt{2(m-\frac{1}{2})^2 + \frac{27}{2}}}$ ，从而知当 $m = \frac{1}{2}$ 时，得解.

【解答】(1) 证明：连接 AF ，

$\because E, F$ 分别为直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的棱 AC 和 CC_1 的中点，且 $AB = BC = 2$ ，

$$\therefore CF = 1, BF = \sqrt{5},$$

$\because BF \perp A_1B_1, AB \parallel A_1B_1$,

$\therefore BF \perp AB$

$$\therefore AF = \sqrt{AB^2 + BF^2} = \sqrt{2^2 + (\sqrt{5})^2} = 3, AC = \sqrt{AF^2 - CF^2} = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2, \text{ 即 } BA \perp BC,$$

故以 B 为原点， BA, BC, BB_1 所在直线分别为 x, y, z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，

则 $A(2, 0, 0), B(0, 0, 0), C(0, 2, 0), E(1, 1, 0), F(0, 2, 1)$ ，

设 $B_1D = m$ ，则 $D(m, 0, 2)$ ，

$$\therefore \overrightarrow{BF} = (0, 2, 1), \overrightarrow{DE} = (1 - m, 1, -2),$$

$$\therefore \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{DE} = 0, \text{ 即 } BF \perp DE.$$

(2) 解： $\because AB \perp$ 平面 BB_1C_1C ， $\therefore$ 平面 BB_1C_1C 的一个法向量为 $\vec{p} = (1, 0, 0)$ ，

由 (1) 知， $\overrightarrow{DE} = (1 - m, 1, -2), \overrightarrow{EF} = (-1, 1, 1)$ ，

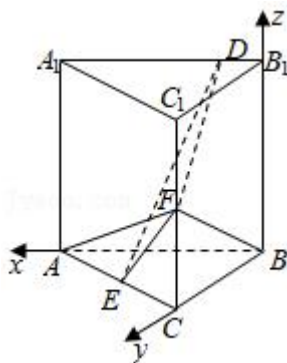
设平面 DEF 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{DE} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{EF} = 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} (1-m)x + y - 2z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$,

令 $x=3$, 则 $y=m+1$, $z=2-m$, $\therefore \vec{n} = (3, m+1, 2-m)$,

$$\therefore \cos \langle \vec{p}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{p} \cdot \vec{n}}{|\vec{p}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{3}{1 \times \sqrt{9 + (m+1)^2 + (2-m)^2}} = \frac{3}{\sqrt{2m^2 - 2m + 14}} = \frac{3}{\sqrt{2(m - \frac{1}{2})^2 + \frac{27}{2}}},$$

$\therefore$ 当 $m = \frac{1}{2}$ 时, 面 BB_1C_1C 与面 DFE 所成的二面角的余弦值最大, 此时正弦值最小,

故当 $B_1D = \frac{1}{2}$ 时, 面 BB_1C_1C 与面 DFE 所成的二面角的正弦值最小.



【点评】 本题考查空间中线与线的垂直关系, 二面角的求法, 熟练掌握利用空间向量证明线线垂直和求二面角的方法是解题的关键, 考查空间立体感、推理论证能力和运算能力, 属于中档题.

20. (12分) 抛物线 C 的顶点为坐标原点 O , 焦点在 x 轴上, 直线 $l: x=1$ 交 C 于 P, Q 两点, 且 $OP \perp OQ$. 已知点 $M(2, 0)$, 且 $\odot M$ 与 l 相切.

(1) 求 $C, \odot M$ 的方程;

(2) 设 A_1, A_2, A_3 是 C 上的三个点, 直线 A_1A_2, A_1A_3 均与 $\odot M$ 相切. 判断直线 A_2A_3 与 $\odot M$ 的位置关系, 并说明理由.

【分析】 (1) 由题意结合直线垂直得到关于 p 的方程, 解方程即可确定抛物线方程, 然后利用直线与圆的关系确定圆的圆心和半径即可求得圆的方程;

(2) 分类讨论三个点的横坐标是否相等, 当有两个点横坐标相等时明显相切, 否则, 求得直线方程, 利用直线与圆相切的充分必要条件和题目中的对称性可证得直线与圆相切.

【解答】 解: (1) 因为 $x=1$ 与抛物线有两个不同的交点, 故可设抛物线 C 的方程为: y^2

$$=2px \ (p>0),$$

$$\text{令 } x=1, \text{ 则 } y=\pm\sqrt{2p},$$

根据抛物线的对称性，不妨设 P 在 x 轴上方， Q 在 x 轴下方，故 $P(1, \sqrt{2p})$ ， $Q(1, -\sqrt{2p})$ ，

$$\text{因为 } OP \perp OQ, \text{ 故 } 1+\sqrt{2p} \times (-\sqrt{2p})=0 \Rightarrow p=\frac{1}{2},$$

抛物线 C 的方程为： $y^2=x$ ，

因为 $\odot M$ 与 l 相切，故其半径为 1，故 $\odot M: (x-2)^2+y^2=1$ 。

(2) 设 $A_1(x_1, y_1)$ ， $A_2(x_2, y_2)$ ， $A_3(x_3, y_3)$ 。

当 A_1, A_2, A_3 其中某一个为坐标原点时（假设 A_1 为坐标原点时），

设直线 A_1A_2 方程为 $kx-y=0$ ，根据点 $M(2, 0)$ 到直线距离为 1 可得 $\frac{|2k|}{\sqrt{1+k^2}}=1$ ，解

$$\text{得 } k=\pm\frac{\sqrt{3}}{3},$$

联立直线 A_1A_2 与抛物线方程可得 $x=3$ ，

此时直线 A_2A_3 与 $\odot M$ 的位置关系为相切，

当 A_1, A_2, A_3 都不是坐标原点时，即 $x_1 \neq x_2 \neq x_3$ ，直线 A_1A_2 的方程为 $x-(y_1+y_2)y+y_1y_2=0$ ，

$$\text{此时有, } \frac{|2+y_1y_2|}{\sqrt{1+(y_1+y_2)^2}}=1, \text{ 即 } (y_1^2-1)y_2^2+2y_1y_2+3-y_1^2=0,$$

$$\text{同理, 由对称性可得, } (y_1^2-1)y_3^2+2y_1y_3+3-y_1^2=0,$$

所以 y_2, y_3 是方程 $(y_1^2-1)t^2+2y_1t+3-y_1^2=0$ 的两根，

依题意有，直线 A_2A_3 的方程为 $x-(y_2+y_3)y+y_2y_3=0$ ，

$$\text{令 } M \text{ 到直线 } A_2A_3 \text{ 的距离为 } d, \text{ 则有 } d^2 = \frac{(2+y_2y_3)^2}{1+(y_2+y_3)^2} = \frac{(2+\frac{3-y_1^2}{y_1^2-1})^2}{1+(\frac{-2y_1}{y_1^2-1})^2} = 1,$$

此时直线 A_2A_3 与 $\odot M$ 的位置关系也为相切，

综上，直线 A_2A_3 与 $\odot M$ 相切。

【点评】 本题主要考查抛物线方程的求解，圆的方程的求解，分类讨论的数学思想，直

线与圆的位置关系，同构、对称思想的应用等知识，属于中等问题.

21. (12分) 已知 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 函数 $f(x) = \frac{x^a}{a^x}$ ($x > 0$).

(1) 当 $a=2$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=1$ 有且仅有两个交点, 求 a 的取值范围.

【分析】(1) 求出 $a=2$ 时 $f(x)$ 的解析式, 求导, 利用导数与单调性的关系即可求解;

(2) 将已知转化为 $f(x)=1$ 在 $(0, +\infty)$ 有两个不等实根, 变形可得 $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln a}{a}$, 令 $g(x) = \frac{\ln x}{x}$, 利用导数求出 $g(x)$ 的单调性及 $g(x)$ 的大致图象, 即可求解 a 的取值范围.

【解答】解: (1) $a=2$ 时, $f(x) = \frac{x^2}{2^x}$,

$$f'(x) = \frac{2x \cdot 2^x - 2^x \ln 2 \cdot x^2}{(2^x)^2} = \frac{x(2 - x \ln 2)}{2^x} = \frac{\ln 2 \cdot x (\frac{2}{\ln 2} - x)}{2^x},$$

当 $x \in (0, \frac{2}{\ln 2})$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x \in (\frac{2}{\ln 2}, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$,

故 $f(x)$ 在 $(0, \frac{2}{\ln 2})$ 上单调递增, 在 $(\frac{2}{\ln 2}, +\infty)$ 上单调递减.

(2) 由题知 $f(x)=1$ 在 $(0, +\infty)$ 有两个不等实根,

$$f(x)=1 \Leftrightarrow x^a = a^x \Leftrightarrow a \ln x = x \ln a \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln a}{a},$$

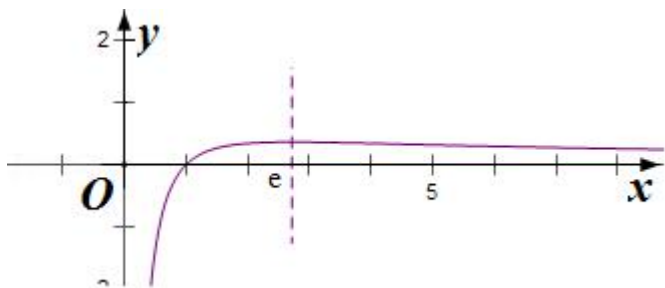
令 $g(x) = \frac{\ln x}{x}$, $g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, $g(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减,

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty, g(e) = \frac{1}{e}, g(1) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0,$$

作出 $g(x)$ 的图象, 如图所示:

由图象可得 $0 < \frac{\ln a}{a} < \frac{1}{e}$, 解得 $a > 1$ 且 $a \neq e$,

即 a 的取值范围是 $(1, e) \cup (e, +\infty)$.



【点评】 本题主要考查利用导数研究函数的单调性，考查转化思想与运算求解能力，属于中档题.

(二) 选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。[选修 4-4：坐标系与参数方程] (10 分)

22. (10 分) 在直角坐标系 xOy 中，以坐标原点为极点， x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 2\sqrt{2}\cos\theta$.

(1) 将 C 的极坐标方程化为直角坐标方程；

(2) 设点 A 的直角坐标为 $(1, 0)$ ， M 为 C 上的动点，点 P 满足 $\overrightarrow{AP} = \sqrt{2}\overrightarrow{AM}$ ，写出 P 的轨迹 C_1 的参数方程，并判断 C 与 C_1 是否有公共点.

【分析】 (1) 把极坐标方程化为 $\rho^2 = 2\sqrt{2}\rho\cos\theta$ ，写出直角坐标方程即可；

(2) 设点 P 的直角坐标为 (x, y) ， $M(x_1, y_1)$ ，利用 $\overrightarrow{AP} = \sqrt{2}\overrightarrow{AM}$ 求出点 M 的坐标，代入 C 的方程化简得出点 P 的轨迹方程，再化为参数方程，计算 $|CC_1|$ 的值即可判断 C 与 C_1 是否有公共点.

【解答】 解：(1) 由极坐标方程为 $\rho = 2\sqrt{2}\cos\theta$ ，得 $\rho^2 = 2\sqrt{2}\rho\cos\theta$ ，化为直角坐标方程是 $x^2 + y^2 = 2\sqrt{2}x$ ，

即 $(x - \sqrt{2})^2 + y^2 = 2$ ，表示圆心为 $C(\sqrt{2}, 0)$ ，半径为 $\sqrt{2}$ 的圆.

(2) 设点 P 的直角坐标为 (x, y) ， $M(x_1, y_1)$ ，因为 $A(1, 0)$ ，

所以 $\overrightarrow{AP} = (x - 1, y)$ ， $\overrightarrow{AM} = (x_1 - 1, y_1)$ ，

由 $\overrightarrow{AP} = \sqrt{2}\overrightarrow{AM}$ ，

$$\text{即} \begin{cases} x - 1 = \sqrt{2}(x_1 - 1) \\ y = \sqrt{2}y_1 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-1)+1 \\ y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}x \end{cases},$$

所以 $M(\frac{\sqrt{2}}{2}(x-1)+1, \frac{\sqrt{2}}{2}y)$, 代入 C 的方程得 $[\frac{\sqrt{2}}{2}(x-1)+1-\sqrt{2}]^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2}y)^2 = 2$,

化简得点 P 的轨迹方程是 $(x-3+\sqrt{2})^2 + y^2 = 4$, 表示圆心为 $C_1(3-\sqrt{2}, 0)$, 半径为 2 的圆;

化为参数方程是 $\begin{cases} x=3-\sqrt{2}+2\cos\theta \\ y=2\sin\theta \end{cases}$, θ 为参数;

计算 $|CC_1| = |(3-\sqrt{2}) - \sqrt{2}| = 3-2\sqrt{2} < 2-\sqrt{2}$,

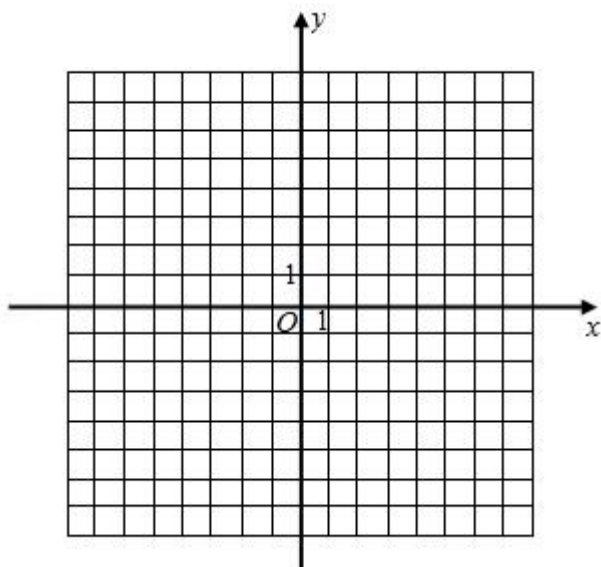
所以圆 C 与圆 C_1 内含, 没有公共点.

【点评】 本题考查了参数方程与极坐标的应用问题, 也考查了转化思想与运算求解能力, 是中档题.

[选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

23. 已知函数 $f(x) = |x-2|$, $g(x) = |2x+3| - |2x-1|$.

- (1) 画出 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的图像;
- (2) 若 $f(x+a) \geq g(x)$, 求 a 的取值范围.



【分析】 (1) 通过对 x 分类讨论, 写出分段函数的形式, 画出图像即可得出.

(2) 由图像可得: $f(6) = 4$, $g(\frac{1}{2}) = 4$, 若 $f(x+a) \geq g(x)$, 说明把函数 $f(x)$ 的图像向左或向右平移 $|a|$ 单位以后, $f(x)$ 的图像不在 $g(x)$ 的下方, 由图像观察可得出

结论.

【解答】解：（1）函数 $f(x) = |x - 2| = \begin{cases} x-2, & x \geq 2 \\ 2-x, & x < 2 \end{cases}$,

$$g(x) = |2x+3| - |2x-1| = \begin{cases} 4, & x \geq \frac{1}{2} \\ 4x+2, & -\frac{3}{2} < x < \frac{1}{2} \\ -4, & x \leq -\frac{3}{2} \end{cases}.$$

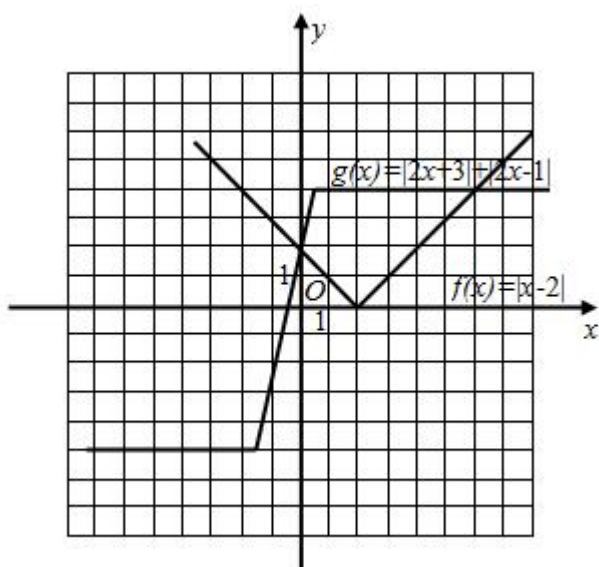
画出 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的图像：

（2）由图像可得： $f(6) = 4$, $g(\frac{1}{2}) = 4$,

若 $f(x+a) \geq g(x)$, 说明把函数 $f(x)$ 的图像向左或向右平移 $|a|$ 单位以后, $f(x)$ 的图像不在 $g(x)$ 的下方,

由图像观察可得： $a \geq 2 - \frac{1}{2} + 4 = \frac{11}{2}$

$\therefore a$ 的取值范围为 $[\frac{11}{2}, +\infty)$.



【点评】 本题考查了分段函数的图像与性质、方程与不等式的解法, 考查了推理能力与计算能力, 属于中档题.