1 Proyección y Reflexión respecto de un plano en $\mathbb{R}^3$

En este capítulo estudiaremos como proyectar y reflejar un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ sobre un plano $\pi \subset \mathbb{R}^3$. Comenzaremos recordando un resultado importante sobre espacios vectoriales: La descomposición en suma directa de subespacio ortogonales.
Recordemos que dado S un subespacio de $\mathbb{R}^3$ su complemento ortogonal es el subespacio de todos aquellos vectores que son ortogonales a todos los vectores de S, es decir,

$$S^{\perp} = \{w \in \mathbb{R}^3 : \; v \cdot w = 0, \text{ para cada } v \in S\}$$

Ejemplo 1.1

Consideremos el subespacio $S \subseteq \mathbb{R}^3$ generado por los vectores $\vec{u} = (1,0,1)$ y $\vec{v} = (1,1,0)$. Es decir, $S = \langle (1,0,1),(1,1,0) \rangle$. Vamos a buscar su complemento ortogonal.
Sabemos que unn vector $(x,y,z) \in S$ si y solo si es combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Es decir deben existir escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$(x,y,z) = \alpha(1,0,1) + \beta(1,1,0)$$

Por otro lado, notemos que un vector $w \in S^{\perp}$ si y solo si

$$w \cdot (x,y,z) = 0 \Rightarrow w \cdot \alpha(1,1,0) + \beta(1,0,1) = 0$$

Por las propiedades del producto escalar, sabemos que

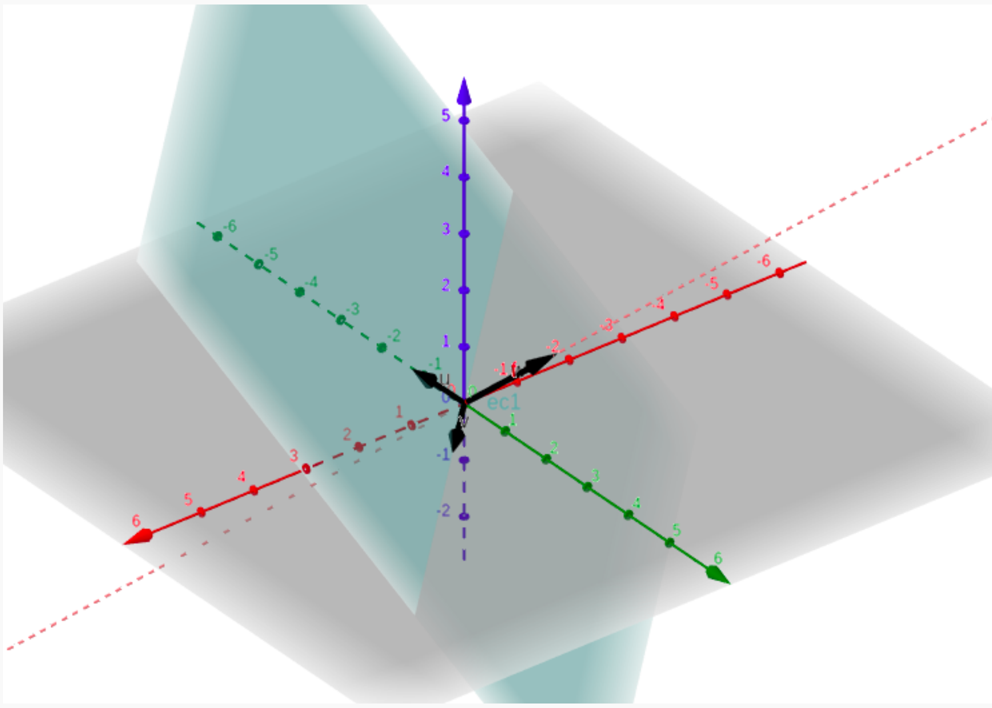
$$\begin{aligned} w \cdot (x,y,z) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad w \cdot \alpha(1,1,0) + \beta(1,0,1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha w \cdot (1,1,0) + \beta w \cdot (1,0,1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad w \cdot (1,1,0) = 0 \wedge w \cdot (1,0,1) = 0 \end{aligned}$$

Es decir, bastará que dicho vector sea perpendicular a cada uno de los generadores del plano. Para buscar a dicho vector w, podemos utilizar el producto vectorial

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1,1,1)$$

Pero además sabemos que cualquier múltiplo escalar de w será también perpendicular al plano, por lo tanto,

$$S^{\perp} = \langle w \rangle = \langle (-1,1,1) \rangle = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; (x,y,z) = \lambda(-1,1,1)\}$$



1.png

Por lo que hemos visto en el ejemplo anterior, el complemento ortogonal de un plano en $\mathbb{R}^3$ serÃ¡ una recta perpendicular al plano en cuestión.
El siguiente resultado será de mucha utilidad para hallar proyecciones sobre el plano

Teorema 1.1

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y sea $S \subset \mathbb{V}$ un subespacio vectorial. Entonces

$$\mathbb{V} = S \oplus S^{\perp}$$

Es decir, para cada $v \in \mathbb{V}$ existen únicos vectores $v_1 \in S$ y $v_2 \in S^{\perp}$ tales que

$$v = v_1 + v_2$$

Donde además

$$v_1 = Proy_S(v) \quad v_2 = Proy_{S^{\perp}}(v)$$

Es decir, que con solo calcular la proyección sobre S, podemos obtener la proyección sobre su complemento ortogonal

$$v = Proy_S(v) + Proy_{S^{\perp}}(v) \Rightarrow Proy_{S^{\perp}}(v) = v - Proy_S(v)$$

En otras palabras, solo debemos proyectar sobre la recta que es ortogonal al plano y podemos obtener la proyección sobre el plano haciendo una simple resta.

Ejemplo 1.1

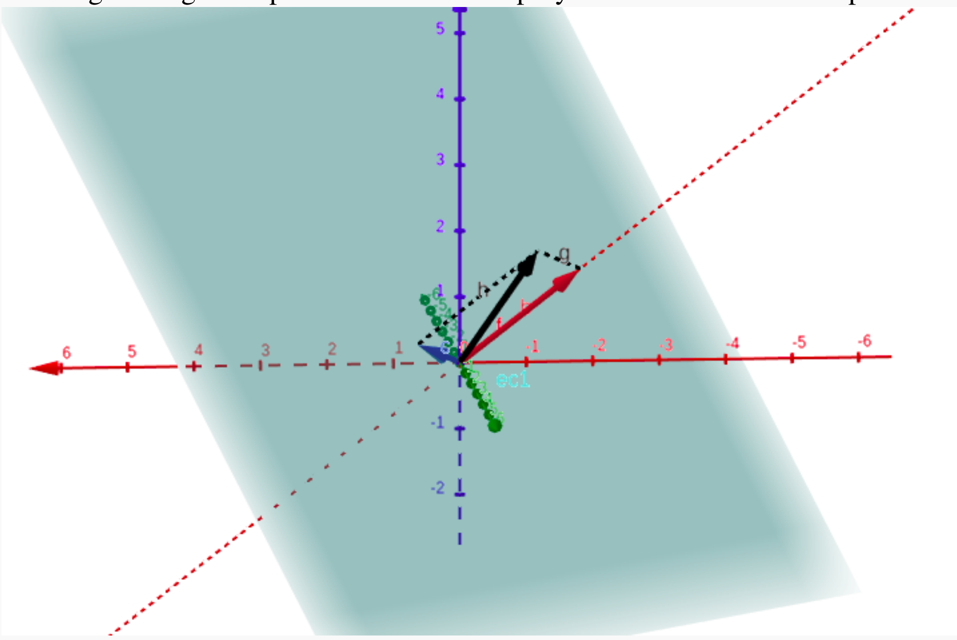
Si tomamos el ejemplo anterior, es sencillo verificar que S es el plano cuya ecuación implícita es $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ -x+y+z=0\}$ y $S^{\perp} = \langle(-1,1,1)\rangle$. Por lo tanto, para encontrar la proyección sobre el plano S, buscaremos la proyección sobre su complemento ortogonal y luego restaremos.

$$Proy_{S^{\perp}}(-1,2,2) = \frac{(-1,2,2)\cdot(-1,1,1)}{||(-1,1,1)||^2}(-1,1,1) = \left(-\frac{5}{3},\frac{5}{3},\frac{5}{3}\right)$$

Luego,

$$\begin{aligned}
Proy_S(-1,2,2) &= (-1,2,2) - Proy_{S^\perp}(-1,2,2) \\
&= (-1,2,2) - \left(-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right) \\
&= \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)
\end{aligned}$$

Notemos que el vector $Proy_S(-1,2,2) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ efectivamente satisface la ecuación implícita del plano. En el siguiente gráfico podemos observar la proyección sobre cada subespacio.



2.png

Reflexión sobre un plano

El argumento para encontrar la reflexión de un vector respecto de un plano es también muy geométrico. En efecto, si notamos en el gráfico anterior hemos hecho un buen uso de la ley del paralelogramo y la resta de vectores.
Notemos que, si a la proyección sobre S le sumamos el opuesto de la proyección sobre $S^\perp$, en otras palabras, volvemos a restarle la proyección sobre $S^\perp$ obtenemos el vector v reflejado respecto a S. Es decir,

$$Ref_S(v) = Proy_S(v) - Proy_{S^\perp}(v) = v - 2Proy_{S^\perp}(v)$$

Ejemplo 1.2

Hallaremos la reflexión de $v = (-1,2,2)$ respecto al plano $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ -x+y+z = 0\}$. Es decir, reutilizaremos el ejemplo anterior.
Sabemos que $Proy_{S^\perp}(-1,2,2) = \left(-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
Ref_S(-1,2,2) &= (-1,2,2) - 2\left(-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right) \\
&= \left(\frac{7}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right)
\end{aligned}$$

3.png