Problemas – Tema 8

Problemas resueltos - 9 - definición de asíntotas de funciones

1. Sea la función $f(x)=a+\frac{bx+c}{x^2+1}$ **, donde** a,b **y** c **son números reales. Calcula los valores de** a,b **y** c **sabiendo que** $\lim_{x\to+\infty} f(x)=3$ **, la gráfica de** $f(x)$ **corta al eje** OY **en el punto de ordenada** $y=2$ **y que la gráfica pasa por el punto** $(1,\frac{3}{2})$ **.**

Expresamos la función como una única fracción.

$$f(x)=\frac{ax^2+bx+a+c}{x^2+1}$$

Interpretamos con ecuaciones cada una de las frases del enunciado.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=3 \rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+a+c}{x^2+1}=\frac{a}{1}=a \rightarrow a=3$$

$$Corte\ \ eje\ \ OY\ \ en\ \ y=2 \rightarrow f(0)=2 \rightarrow \frac{a+c}{1}=2 \rightarrow \frac{3+c}{1}=2 \rightarrow c=-1$$

$$f(x)\ \ pasa\ \ por\ \ (1,\frac{3}{2}) \rightarrow f(1)=\frac{3}{2} \rightarrow \frac{a+b+a+c}{1+1}=\frac{3}{2} \rightarrow \frac{b+5}{2}=\frac{3}{2} \rightarrow b=-2$$

2. Calcula las asíntotas de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-9}$

b) $f(x)=\dfrac{3x^3+2x^2+3}{x^2+3x+2}$

c) $f(x)=\dfrac{2x+5}{3x}$

a) En un cociente de polinomios, los candidatos a asíntotas verticales son los valores que anulan al denominador.

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{2x-1}{x^2-9}=\frac{5}{0^-}=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to 3^+}\frac{2x-1}{x^2-9}=\frac{5}{0^+}=+\infty \quad \to \text{AV en} \quad x=3$$

$$\lim_{x\to -3^-}\frac{2x-1}{x^2-9}=\frac{5}{0^+}=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to -3^+}\frac{2x-1}{x^2-9}=\frac{5}{0^-}=-\infty \quad \to \text{AV en} \quad x=-3$$

La asíntota horizontal se obtiene estudiando el comportamiento de la función en el infinito. Al ser un cociente de polinomios, la AH en más infinito coincide con la AH en menos infinito.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x^2-9}=\frac{\infty}{\infty} \quad \to \text{Indeterminación}$$

Grado numerador < Grado denominador → $\lim_{x\to\infty}\dfrac{2x-1}{x^2-9}=0 \quad \to \quad y=0$

Al existir asíntota horizontal, no tendremos oblicua. Recuerda: en un cociente de polinomios si el grado del numerador es menor o igual al grado del denominador, tendremos AH pero no AO.

b) Los candidatos a asíntotas verticales aparecen, nuevamente, en los valores que anulan al denominador del cociente de polinomios.

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{3x^3+2x^2+3}{x^2+3x+2}=\frac{2}{0^-}=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to -1^+}\frac{3x^3+2x^2+3}{x^2+3x+2}=\frac{2}{0^+}=+\infty \quad \to \text{AV en} \quad x=-1$$

$$\lim_{x\to -2^-}\frac{3x^3+2x^2+3}{x^2+3x+2}=\frac{-13}{0^+}=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to -2^+}\frac{3x^3+2x^2+3}{x^2+3x+2}=\frac{-13}{0^-}=+\infty \quad \to \text{AV en} \quad x=-2$$

La asíntota horizontal se obtiene estudiando el comportamiento de la función en el infinito.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+2x^2+3}{x^2+3x+2}=\frac{\infty}{\infty} \quad \to \text{Indeterminación}$$

Grado numerador > Grado denominador → $\lim_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+2x^2+3}{x^2+3x+2}=\infty$

Al no existir asíntota horizontal, estudiamos la oblicua $y=mx+n$.

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+2x^2+3}{x^3+3x^2+2x}=\frac{\infty}{\infty}$$ → Indeterminación

Grado numerador = Grado denominador → $m=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+2x^2+3}{x^3+3x^2+2x}=\frac{3}{1}=3$

$$n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^3+2x^2+3}{x^2+3x+2}-3x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-7x^2-6x+3}{x^2+3x+2}=\frac{-7}{1}=-7$$

Asíntota oblicua → $y=3x-7$ tanto en más como en menos infinito.

Recuerda: en un cociente de polinomios si el grado del numerador supera en una unidad al grado del denominador, tendremos AO y no tendremos AH.

c) Una vez más, los candidatos a asíntotas verticales aparecen en los valores que anulan al denominador.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{2x+5}{3x}=\frac{5}{0^-}=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{2x+5}{3x}=\frac{5}{0^+}=+\infty$$ → AV en $x=0$

La asíntota horizontal se obtiene estudiando el comportamiento de la función en el infinito.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+5}{3x}=\frac{\infty}{\infty}$$ → Indeterminación

Grado numerador = Grado denominador → $\lim_{x\to\infty}\frac{2x+5}{3x}=\frac{2}{3}$ → $y=\frac{2}{3}$

Al existir asíntota horizontal, no tendremos oblicua.

3. Estudia las asíntotas de $f(x)=\frac{x^3}{x^2+1}$ **.**

El dominio es $Dom(f)=\mathbb{R}$ ya que el denominador nunca se anula. Por lo tanto, no existen asíntotas verticales. Las asíntotas horizontales las estudiamos con el límite en el infinito de la función. Al ser un coeficiente entre polinomios, con el grado del numerador más grande que en el denominador, tendremos:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

Por lo tanto tampoco tenemos asíntota horizontal. Estudiamos las asíntotas oblicuas. Recordamos que en cociente de polinomios del mismo grado, cuando la variable tiende a infinito, el resultado del límite coincide con el cociente de los coeficientes de las máximas potencias.

$$m=\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^3+x}=1 \quad \rightarrow \text{Cociente de polinomios del mismo grado}$$

$$n=\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^2+1}-x=\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-x^3-x}{x^2+1}=0$$

Tenemos asíntota oblicua en $y=x$, tanto en más como en menos infinito (al ser un cociente de polinomios las dos AO coinciden).