

Euler (1707-1783): Zusammenhang zwischen Kreiszahl π und den Primzahlen

Satz:

$$\pi = 4 \cdot \frac{3}{3+1} \cdot \frac{5}{5-1} \cdot \frac{7}{7+1} \cdot \frac{11}{11+1} \cdot \frac{13}{13-1} \cdot \dots$$

Beweis:

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \rightarrow \operatorname{atan}(1) = \frac{\pi}{4} \rightarrow \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \dots = A$$

wegen Taylorreihe von $\operatorname{atan}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \dots$ für $x = 1$.

Nun $B = A + A/3 \Rightarrow$ alle Brüche, deren Nenner Vielfache von 3 sind, fallen weg.

Nun $C = B - B/5 \Rightarrow$ alle Brüche, deren Nenner Vielfache von 5 sind, fallen weg.

Nun $D = C + C/7 \Rightarrow$ alle Brüche, deren Nenner Vielfache von 7 sind, fallen weg.

usw. analog Sieb von Eratosthenes

Geht man bis unendlich, fallen alle Brüche weg und 1 bleibt übrig:

$$A \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{7}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{11}\right) \cdot \dots = 1,$$

wobei der Faktor $\left(1 + \frac{1}{p}\right)$ lautet, wenn $p=4k-1$, sonst $\left(1 - \frac{1}{p}\right)$.

$$\text{Da } A = \frac{\pi}{4} \rightarrow \pi = 4 \cdot \frac{3}{3+1} \cdot \frac{5}{5-1} \cdot \frac{7}{7+1} \cdot \frac{11}{11+1} \cdot \frac{13}{13-1} \cdot \dots$$

Damit besteht ein Zusammenhang zwischen der Kreiszahl π und den Primzahlen.

q.e.d.