13.2 Ejercicios

- Hallar el límite indicado utilizando los límites

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} F(x,y) = 4 \quad \wedge \quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = 3.$$

⑤ $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} [F(x,y) - g(x,y)] = \lim_{(x,y)\to(a,b)} F(x,y) - \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)$$

$$= 4 - 3 = \boxed{1}$$

⑧ $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \left[\frac{F(x,y)+g(x,y)}{F(x,y)}\right] = \frac{\lim_{(x,y)\to(a,b)} F(x,y) + \lim_{(x,y)(a,b)} g(x,y)}{\lim_{(x,y)\to(a,b)} F(x,y).}$$

$$= \frac{4+3}{4} = \boxed{\frac{7}{4}}$$

- Calcular el límite y analizar la continuidad de la función.

⑨ $$\lim_{(x,y)\to(2,1)} (2x^2+y) = \left(2 \lim_{(x,y)\to(2,1)} x^2 + \lim_{(x,y)(2,1)} y\right)$$

$$= 2(2)^2 + (1) = 2(4)+1 = 8+1$$

$$= \boxed{9}$$

∴ La función es continua

(15) $\lim\limits_{(x,y)(1,1)} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \dfrac{(1)(1)}{(1)^2+(1)^2} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$

$\therefore$ La función es continua, excepto en $(0,0)$.

- Hallar el límite (si existe). Si el límite no existe, explicar por qué.

(25) $\lim\limits_{(x,y)(0,0)} \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{1}{0+0} = 0$ NE.

El límite no existe porque el denominador es $x+y$ en $(0,0)$ es $(x,y) \to (0,0)$.

(27) $\lim\limits_{(x,y)(2;2)} \dfrac{x^2-y^2}{x-y} = \dfrac{(2)^2-(2)^2}{2-2} = \dfrac{4-4}{2-2} = \dfrac{0}{0}$ Indef.

$\lim\limits_{(x,y)(2,2)} \dfrac{\cancel{(x-y)}(x+y)}{\cancel{x-y}} = \lim\limits_{(x,y)(2,2)} (x+y) = 2+2 = \boxed{4}$

(28) $\lim\limits_{(x,y)(0,0)} \dfrac{x^4-4y^4}{x^2+2y^2} = \dfrac{(0)^4-4(0)^4}{(0)^2+2(0)^2} = \dfrac{0-0}{0-0} = \dfrac{0}{0}$

Indef.

$\lim\limits_{(x,y)(0,0)} \dfrac{(x^2-2y^2)\cancel{(x^2+2y^2)}}{\cancel{x^2+2y^2}} = \lim\limits_{(x,y)(0,0)} (x^2-2y^2) = 0$

• Utilizar las coordenadas polares para hallar el límite.

(53) $$\lim_{(x,y)(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)(0,0)} \frac{(r\cos\theta)(r\,\text{sen}\,\theta)^2}{(r\cos\theta)^2+(r\,\text{sen}\,\theta)^2}$$

$$= \lim_{(x,y)(0,0)} \frac{(r\cos\theta)(r^2\,\text{sen}^2\theta)}{r^2}$$

$$= \lim \frac{\cancel{r}^3\cos\theta\,\text{sen}^2\theta}{\cancel{r}^2} = \lim (r\cos\theta\,\text{sen}^2\theta)$$

$$= \boxed{0}$$

(55) $$\lim_{(x,y)(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)(0,0)} \frac{(r^2\cos^2\theta)(r^2\,\text{sen}^2\theta)}{r^2}$$

$$= \lim_{(x,y)(0,0)} \frac{\cancel{r}^4\cos^2\theta\,\text{sen}^2\theta}{\cancel{r}^2}$$

$$= \lim_{(x,y)(0,0)} r^2\cos^2\theta\,\text{sen}^2\theta.$$

$$= r^2\cos^2 0\,\text{sen}^2 0 = \boxed{0}$$

• Usar las coordenadas polares y la regla de L'Hôpital para encontrar el límite.

(59) $$\lim_{(x,y)(0,0)} \frac{\text{sen}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{\text{sen}(r)}{r} = 1.$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = r.$$