Problemas – Tema 1

Problemas resueltos - 6 - sistemas de ecuaciones

1. Halla los valores de x **e** y **que verifican** $\begin{Bmatrix} 2x+y=-1 \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=\dfrac{-1}{15} \end{Bmatrix}$

De la primera ecuación del sistema despejamos el valor de y .

$$y=-1-2x$$

Que sustituimos en la segunda ecuación.

$$\frac{2}{x}+\frac{3}{-(1+2x)}=\frac{-1}{15}$$
$$\frac{-2(2x+1)+3x}{-x(2x+1)}=\frac{-1}{15}$$
$$\frac{-x-2}{-x-2x^2}=\frac{-1}{15}$$
$$x^2+8x+15=0$$
$$x_1=-3$$
$$x_2=-5$$

La pareja de soluciones para la variable x genera sus correspondientes soluciones para la variable y , que satisfacen el sistema de partida.

$$Si \quad x_1=-3\rightarrow y_1=5$$
$$Si \quad x_2=-5\rightarrow y_2=9$$

2. Resuelve $\begin{Bmatrix} x^2-y^2=\dfrac{143}{9} \\ (x-y)^2=\dfrac{121}{9} \end{Bmatrix}$

En la primera ecuación reconocemos el binomio "suma por diferencia" $(x-y)(x+y)$. Para obtener una relación sencilla de una de las incógnitas, dividimos miembro a miembro las dos ecuaciones.

$$\frac{(x+y)(x-y)}{(x-y)^2}=\frac{143}{121}$$

Simplificando.

$$121(x+y)=143(x-y)$$
$$x=12\,y$$

Sustituimos el valor obtenido para x en la primera ecuación del sistema, y obtenemos dos parejas de soluciones válidas.

$$(12\,y)^2-y^2=\frac{143}{9}$$
$$y^2=\frac{1}{9}$$
$$y_1=\frac{1}{3}\rightarrow x_1=4$$
$$y_1=\frac{-1}{3}\rightarrow x_1=-4$$

3. Resuelve el sistema $\left\{\begin{matrix} x-y+z=3 \\ x^2+y=7 \\ xy+z=10 \end{matrix}\right\}$

De la primera ecuación despejamos el valor de z → $z=3-x+y$, que sustituimos en las otras dos ecuaciones, generando un nuevo sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas.

$$\left\{\begin{matrix} x^2+y=7 \\ x\,y+(3-x+y)=10 \end{matrix}\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix} x^2+y=7 \\ x=\dfrac{7-y}{y-1} \end{matrix}\right\}$$

El valor de x de la segunda ecuación lo llevamos a la primera.

$$\left(\frac{7-y}{y-1}\right)^2+y=7$$
$$y^3-8\,y^2+y+42=0$$

Descomponemos por Ruffini, probando las raíces $y=-2, y=3, y=7$, que son divisores del término independiente del polinomio.

$$(y-3)(y-7)(y+2)=0$$
$$si \quad y=3\rightarrow x=2\rightarrow z=4$$
$$si \quad y=7\rightarrow x=0\rightarrow z=10$$
$$si \quad y=-2\rightarrow x=-3\rightarrow z=4$$

4. Calcula los valores de x e y que verifican el sistema.

$$\begin{Bmatrix} x^2+y^2=5 \\ \frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}=\frac{3}{4} \end{Bmatrix}$$

Despejamos x^2 en la primera ecuación $x^2=5-y^2$. Llevamos este resultado a la segunda ecuación.

$$\frac{1}{5-y^2}-\frac{1}{y^2}=\frac{3}{4}$$

Calculamos un denominador común para las fracciones.

$$\frac{4y^2}{4y^2(5-y^2)}-\frac{4(5-y^2)}{4y^2(5-y^2)}=\frac{3y^2(5-y^2)}{4y^2(5-y^2)} \rightarrow 4y^2-4(5-y^2)=3y^2(5-y^2)$$

$$4y^2-20+4y^2=15y^2-3y^4 \rightarrow 3y^4-7y^2-20=0$$

La ecuación bicuadrática la resolvemos con el cambio de variable $y^2=t$.

$$3y^4-7y^2-20=0 \rightarrow 3t^2-7t-20=0 \rightarrow t=\frac{7\pm\sqrt{49+240}}{6} \rightarrow t=\frac{7\pm 17}{6}$$

$$t=\frac{-5}{2} \quad , \quad t=4$$

Si $t=\frac{-5}{2} \rightarrow y=\sqrt{\frac{-5}{2}}\notin\mathbb{R}$

Si $t=4 \rightarrow y=\pm 2$ → solución válida

Si $y=2$, $x^2=5-y^2 \rightarrow x=\pm\sqrt{5-4} \rightarrow x=\pm 1$ → soluciones $(1,2)$, $(-1,2)$

Si $y=-2$, $x^2=5-y^2 \rightarrow x=\pm\sqrt{5-4} \rightarrow x=\pm 1$ → soluciones $(1,-2)$, $(-1,-2)$

5. Resuelve.

$$\left(\begin{array}{c}\sqrt{x}-\sqrt{2+y}=2\\ \frac{x}{3}+2y=1\end{array}\right)$$

En la primera ecuación del sistema, se deja x en un lado de la ecuación y se elevan ambas partes al cuadrado.

$$\sqrt{x}=\sqrt{2+y}+2 \rightarrow (\sqrt{x})^2=(2+\sqrt{2+y})^2 \rightarrow x=4+(2+y)+4\sqrt{2+y}$$
$$x=6+y+4\sqrt{2+y}$$

Con x despejada de la primera ecuación, la despejo también de la segunda.

$$\frac{x}{3}+2y=1 \rightarrow x=3(1-2y)$$

Igualamos los valores de x .

$$6+y+4\sqrt{2+y}=3(-2y+1) \rightarrow 6+y+4\sqrt{2+y}=-6y+3 \rightarrow (4\sqrt{2+y})^2=(-3-7y)^2$$
$$16(2+y)=9+49y^2+42y \rightarrow 49y^2+26y-23=0 \rightarrow y=\frac{-26\pm\sqrt{26^2-4\cdot 49\cdot(-23)}}{2\cdot 49}$$
$$y=\frac{-26\pm 72}{98}$$
$$y_1=\frac{-26+72}{98}=\frac{46}{98}=\frac{23}{49}$$ → No es solución por no satisfacer el sistema inicial
$$y_2=\frac{-26-72}{98}=\frac{-98}{98}=-1 \rightarrow y=-1$$

Calculo x a partir de la solución de y .

$$\frac{x}{3}+2y=1 \rightarrow x=3(-2y+1) \rightarrow x=3(2+1) \rightarrow x=9$$

Soluciones → $\left(\begin{array}{c}y=-1\\ x=9\end{array}\right)$ → cumplen las ecuaciones iniciales y no hacen negativos los discriminantes.

6. Resuelve el sistema.

$$\begin{pmatrix} x-3y+2z=1 \\ 3x+2y+z=-1 \\ -3x+y-z=4 \end{pmatrix}$$

Ponemos el sistema en notación matricial.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Resolvemos por Gauss.

$$F'_2=F_2-3F_1 \quad , \quad F'_3=F_3+3F_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 11 & -5 & -4 \\ 0 & -8 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Intercambiamos la segunda y la tercera columna, operamos.

$$F'_3=F_3+F_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 11 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Resolvemos.

$$3y=3 \rightarrow y=1$$

$$-5z+11y=-4 \rightarrow -5z+11=-4 \rightarrow -5z=-11-4 \rightarrow z=\frac{-15}{-5} \rightarrow z=3$$

$$x+2z-3y=1 \rightarrow x+6-3=1 \rightarrow x=-2$$

7. Resolver $\left\{\begin{matrix} x+y-2z=9 \\ 2x-y+6z=-1 \\ 2x-y+4z=4 \end{matrix}\right\}$

Multiplicamos la segunda ecuación por (-1)

$$\left\{\begin{matrix} x+y-2z=9 \\ -2x+y-6z=1 \\ 2x-y+4z=4 \end{matrix}\right\}$$

Sumamos la segunda y tercera ecuación del nuevo sistema, resultando:

$$-2z=5 \quad \rightarrow \quad z=\frac{-5}{2}$$

Volvemos al sistema de partida:

$$\left\{\begin{matrix} x+y-2z=9 \\ 2x-y+6z=-1 \\ 2x-y+4z=4 \end{matrix}\right\}$$

Sumamos la primera y segunda ecuación:

$3x+4z=8$ → sustituyendo el valor de $z=\frac{-5}{2} \quad \rightarrow \quad 3x-10=8 \quad \rightarrow \quad x=6$

Y llevamos los valores obtenidos a cualquiera de las ecuaciones del sistema, para calcular el valor de y :

$$x+y-2z=9 \quad \rightarrow \quad 6+y+5=9 \quad \rightarrow \quad y=-2$$