与二次函数有关的易错题

利用数形结合思考解题

安装Geogebra软件

题1. 已知关于x的方程$x^2+(k-2)x+k-3=0$

（1）求证：该方程总有实数根；

（2）若方程$x^2+(k-2)x+k-3=0$有一根大于5且小于7，求k的整数值；

（3）在（2）的条件下，对于一次函数$y_1=x+b$和二次函数$y_2=x^2+(k-2)x+k-3$,当$-1<x<7$时，有$y_1>y_2$，直接写出b的取值范围.

解：（1）$\Delta=(k-2)^2-4(k-3)=(k-4)^2\geq 0$，

$\therefore$方程总有实数根；

解：（1）

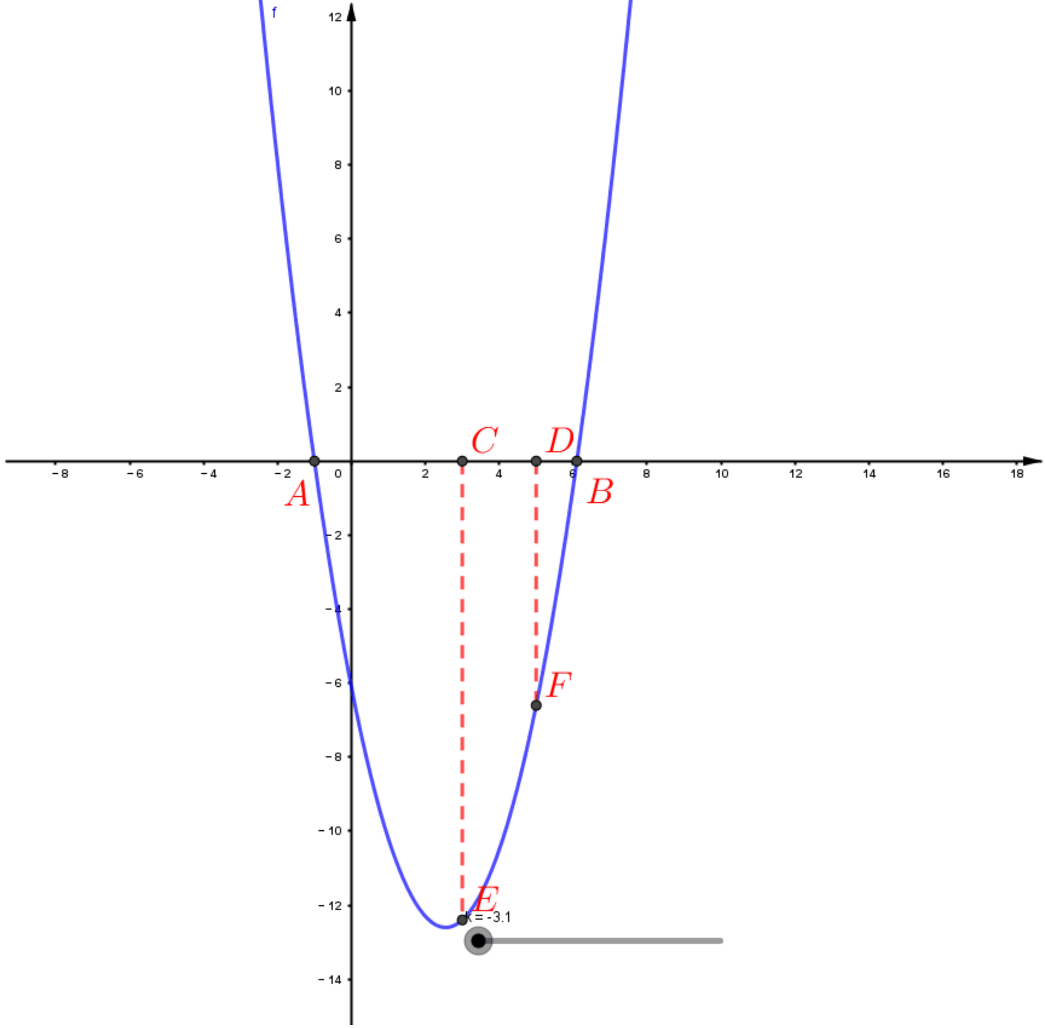
（2）代数解法

解方程可得$x_1=-1, x_2=3-k$，

$\therefore 5<3-k<7 \Rightarrow -4<k<-2$，

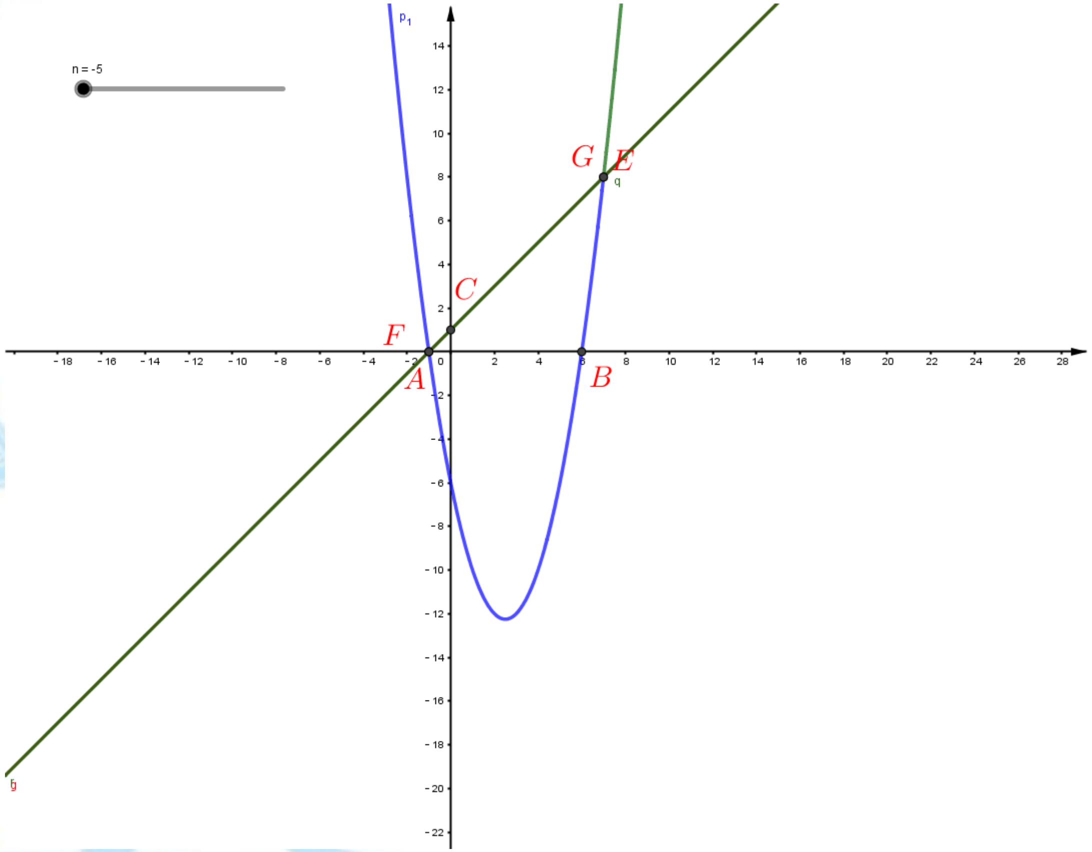
且k为整数，

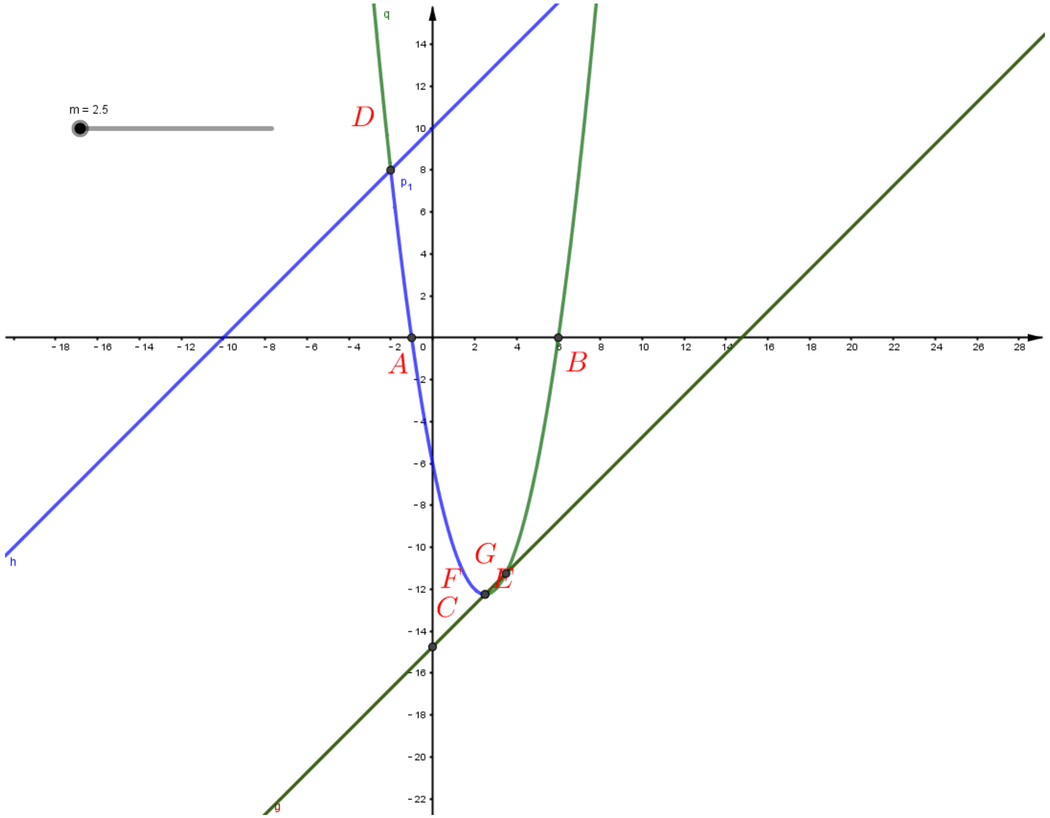
$\therefore\ k=-3$



观看动画演示，探索变式习题

在（2）的条件下，对于一次函数$y_1 = x + b$和二次函数$y_2 = x^2 + (k-2)x + k - 3$,当$-1 < x < 7$时，有$y_1 > y_2$，直接写出$b$的取值范围.





（3：当k=-3时，抛物线$y_2=x^2-5x-6$的大致图象如下，

∵当$-1<x<7$时，有$y_1>y_2$，

∴当$-1<x<7$时，一次函数的图象应在二次函数图象的上方

∴当x=-1时，由$y_2=x^2-5x-6$得， y_2 =0;

当x=7时，由$y_2=x^2-5x-6$得， y_2 =8;

∴两点为（-1，0）和（7，8）

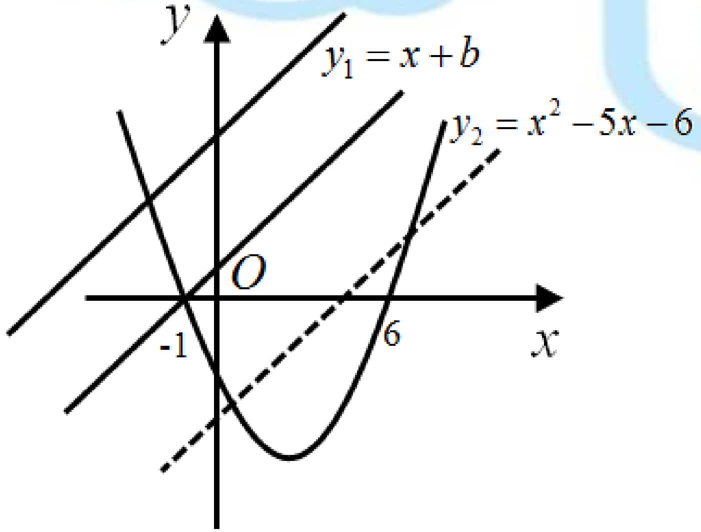
过（-1，0）的直线$y_{12}=x+1$

过（7，8）的直线$y_{13}=x+1$

∴此时符合当$-1<x<7$时，一次函数的图象在二次函数图象的上方

当直线$y_1=x+b$向下平移时，如虚直线所示，此时不符合题意；

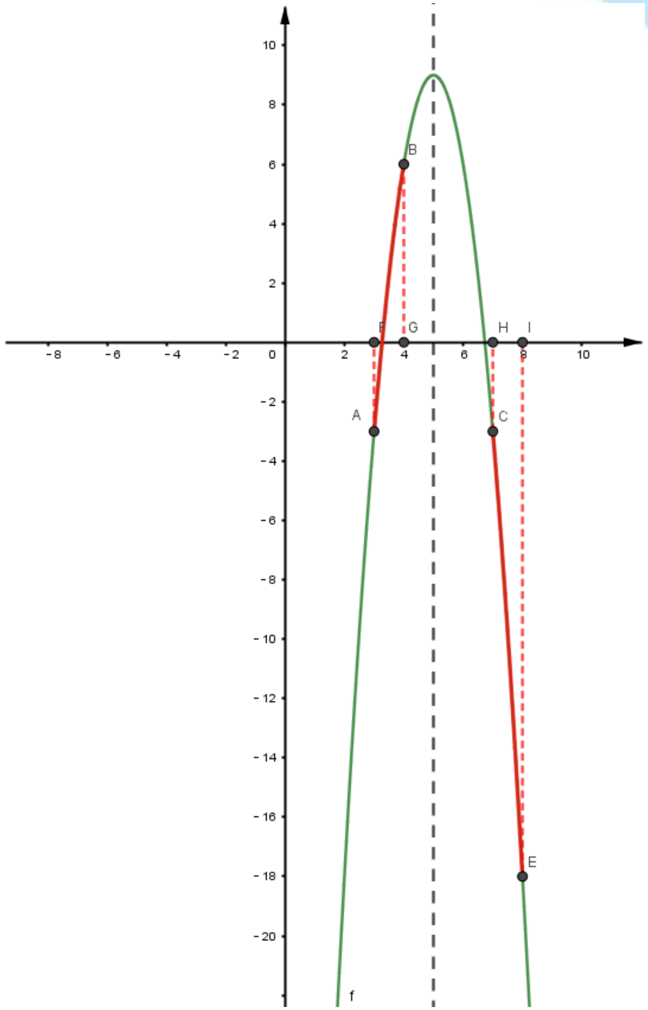
当直线$y_1=x+b$向上平移时，此时当$-1<x<7$时，一次函数的图象在二次函数图象的上方，∴$b\geq1$.



观看动画演示，探索变式习题

题2. 已知点P(m, n)在抛物线$y=a(x-5)^2+9(a\neq 0)$上，当$3<m<4$ 时，总有$n>1$，当$7<m<8$ 时，总有$n<1$，则a的值为(　　)

A. 1　B. -1　C　2　D. -2



解：抛物线的顶点(5,9)，当$7<m<8$时，总有$n<1$，

$\therefore a<0$, 又$\because x<5$时，y随x的增大而增大，

$x>5$时，y随x的增大而减少，

$\because$ 当$3<m<4$时，总有$n>1$，当$7<m<8$时，总有$n<1$，

且$x=3$与$x=7$，对称.

$\therefore m=3$时，$n\leq 1$，$m=7$时，$n\geq 1$.

$$\begin{cases} 4a+9\leq 1 \\ 4a+9\geq 1 \end{cases}$$

解的:$a=-2$

观看动画演示，探索变式习题

题3：关于x的方程$x^2-4x-t=0$在$-1\leqslant x\leqslant 4$范围内有两个不等实数根，则实数t的取值范围是_____.

代数解法

数形结合解法1

题3：关于x的方程$x^2 - 4x - t = 0$在$-1 \leqslant x \leqslant 4$范围内有两个不等实数根，则实数$t$的取值范围是_____.

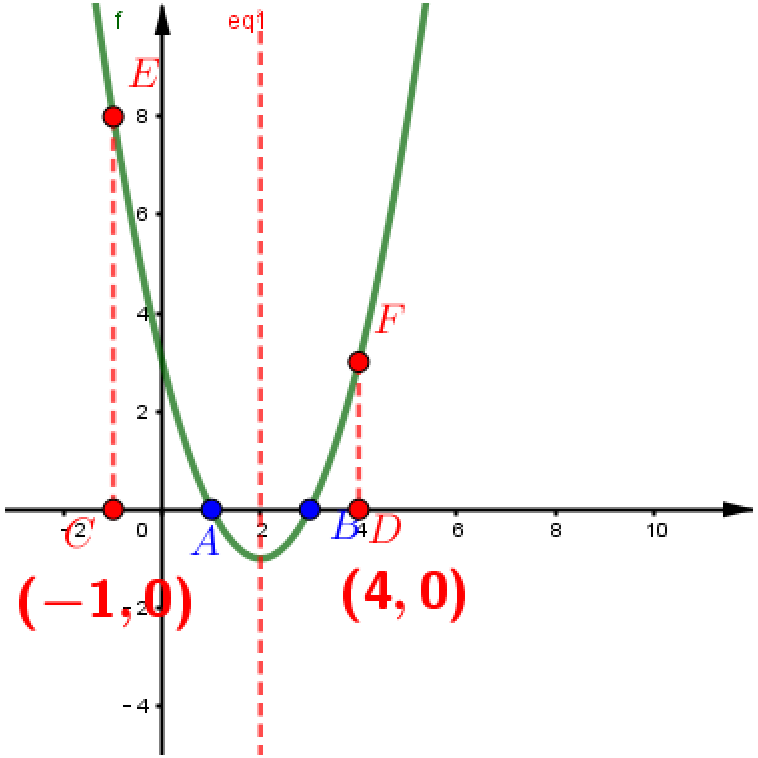
解：设$y = x^2 - 4x - t$

由图像可知：

$$\begin{cases} (-1)^2 - 4 \times (-1) - t \geq 0 \\ 4^2 - 4 \times 4 - t \geq 0 \\ 2^2 - 4 \times 2 - t < 0 \end{cases}$$

解得：$\begin{cases} t \leq 5 \\ t \leq 0 \\ t > -4 \end{cases}$

$\therefore -4 < t \leq 0$



观看动画演示，探索变式习题

数形结合解法2

题3：关于x的方程$x^2-4x-t=0$在$-1\leqslant x\leqslant 4$范围内有两个不等实数根，则实数t的取值范围是_____.

解：设$y_1=x^2-4x; y_2=t;$

一元二次方程$x^2-4x-t=0$的根，可以看作函数y_1与y_2的交点.

方程在$-1\leq x\leq 4$的范围内有实数根，

当$x=-1$时，$y=(-1)^2-4\times(-1)=5$

当$x=4$时，$y=4^2-4\times 4=0$

函数$y_1=x^2-4x$在$x=2$时，

有最小值为:$2^2-4\times 2=-4$;

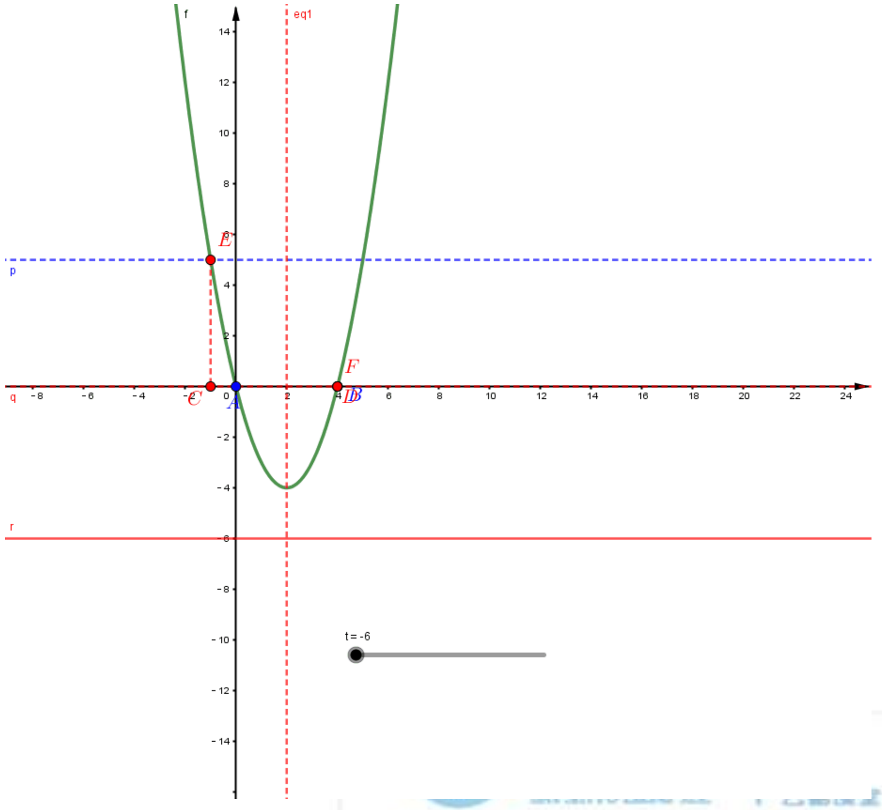
$\therefore$当$-4<x\leq 0$时，函数y_1与y_2的有两个交点，

$\therefore$一元二次方程$x^2-4x-t=0$

在$-1\leq x\leq 4$的范围内有两个实数根，

$\therefore -4<t\leq 0$

观看动画演示，探索变式习题



题4：在平面直角坐标系中，已知抛物线$C: y=ax^2+2x-1(a\neq 0)$和直线l:y=kx+b，点A(-3,-3)，B(1,-1)均在直线l上.

（1）若抛物线C与直线l有交点，求a的取值范围；

（2）当a=-1，二次函数 $y=ax^2+2x-1$ 的自变量x满足m≤x≤m+2时，函数y的最大值为-4，求m的值；

（3）若抛物线C与线段AB有两个不同的交点，请直接写出a的取值范围.

解：（1）点A(-3,-3)，B(1,-1)，代入 y=kx+b，得：

$\begin{cases} k+b=-1 \\ -3k+b=-3 \end{cases}$，解得：$\begin{cases} k=\frac{1}{2} \\ b=-\frac{3}{2} \end{cases}$，$\therefore y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$；

联立$\begin{cases} y=ax^2+2x-1 \\ y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2} \end{cases}$，则有$2ax^2+3x+1=0$，

抛物线C与直线l有交点，$\therefore \Delta=9-8a\geq 0$，$\therefore a\leq \frac{9}{8}$且$a\neq 0$；

（2）当a=-1，二次函数$y=ax^2+2x-1$ 的自变量x满足m≤x≤m+2时，函数y的最大值为-4，求m的值；

解：根据题意可得，$y=-x^2+2x-1$，

∵ a < 0， ∴抛物线开口向下，对称轴$x=1$，

∵ $m\le x\le m+2$时，y有最大值−4，

∴当$y=-4$时，有$-x^2+2x-1=-4$，

解得：$x_1=-1$，$x_2=3$.

1，在$x=1$左侧，y 随x的增大而增大，

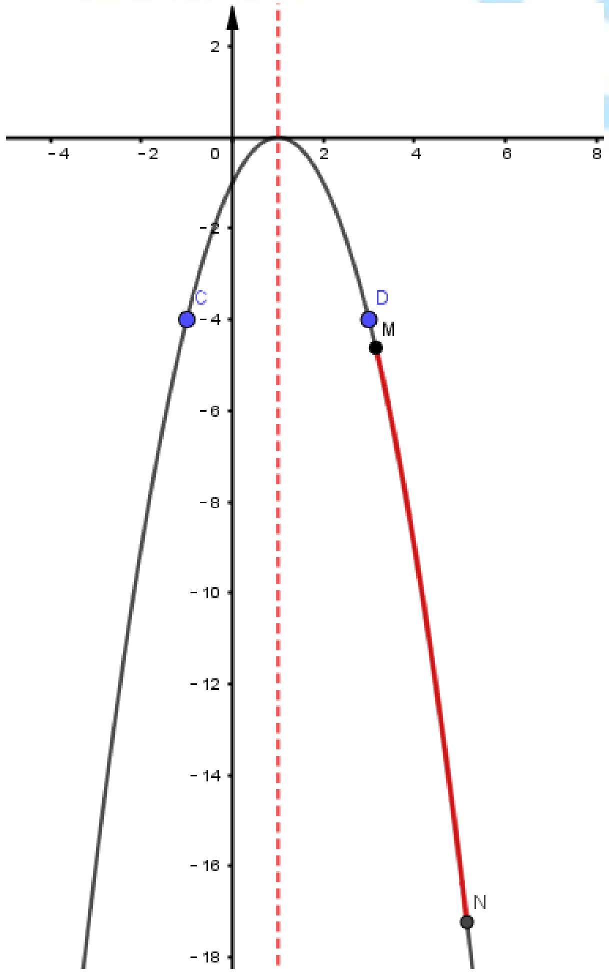
∴ $x=m+2=-1$时，y 有最大值−4，

∴ $m=-3$；

2，在对称轴$x=1$右侧，y 随型x 最大而减小，

∴ $x=m=3$ 时，y 有最大值−4；

综上所述：m=-3或m=3；



观看动画演示，探索变式习题

（3）若抛物线$C: y=ax^2+2x-1(a\neq 0)$与线段AB有两个不同的交点，请直接写出a的取值范围.

①$a<0$ 时，$x=1$时，$y=a+2-1\leq -1$，即$a\leq -2$；

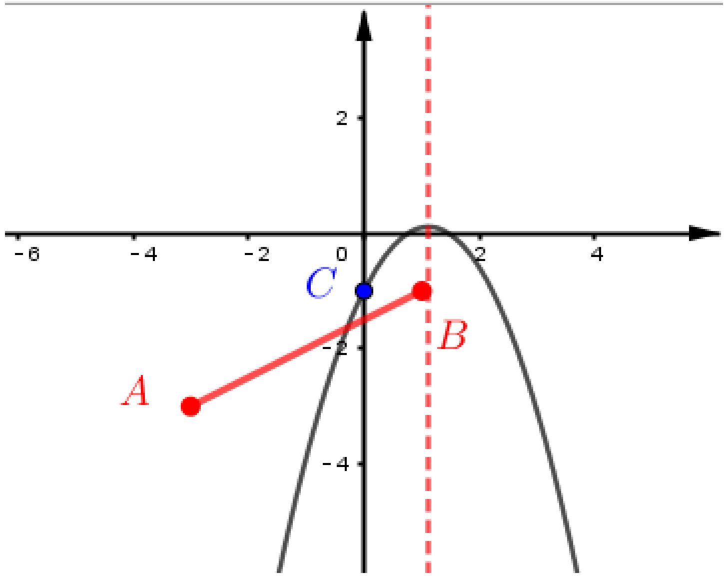
② $a>0$ 时，$x=-3$时，$y=9a-6-1\leq -3$，即$a\geq \frac{4}{9}$，

直线AB的解析式为$y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$，

抛物线与直线联立：$ax^2+2x-1=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$，

$\therefore\ ax^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}=0$，$\therefore \Delta=\frac{9}{4}-2a>0$，$\therefore a<\frac{9}{8}$，

$\therefore a$ 的取值范围为$\frac{4}{9}\leq a<\frac{9}{8}$或a≤-2.



观看动画演示，探索变式习题

小结

- 解决上面方程的根的问题或函数与X轴的交点问题可采用以下过程:
- 1.将方程转化为函数，画出草图。
- 2.分析特殊值或特殊点的函数值是否大于或小于某个值。
- 3.根据题意列出不等式组或方程组。
- 4.得出满足题意得结论。