Ejercicios sobre regla de Laplace y axiomas de Kolgomorov

CURSO	**TEMA**	**WWW.DANIPARTAL.NET**
2ºBach	PROBABILIDAD 05	Colegio Marista "La Inmaculada" de Granada

INFORMACIÓN GENERAL

Ejercicios de aplicación de la regla de Laplace y de los axiomas de probabilidad de Kolgomorov.

Vídeo asociado:

https://www.youtube.com/watch?v=J_0QxQRrn-0

EJEMPLO 1

Sea una bolsa de 4 bolas rojas (R), 2 blancas (B) y 3 verdes (V).

¿Cuál es la probabilidad de extraer al azar una bola roja? ¿Y una bola blanca? ¿Y una verde?

Suponemos sucesos elementales equiprobables, por lo que según la regla de Laplace:

P(R) = 4/9 P(B) = 2/9 P(V) = 3/9

Fíjate que la suma P(R) + P(B) + P(V) es igual a 1, ya que los tres sucesos recogen todos los sucesos elementales posibles del espacio muestral.

EJEMPLO 2

En una baraja española hay 40 cartas distribuidas en 4 palos: oros, copas, espadas y bastos. En cada palo hay 10 cartas (del 1 al 7, más sota, caballo y rey).

¿Cuál es la probabilidad de sacar un rey (R)? ¿Y de sacar una copa (C)? ¿Y de sacar un oro (O) o una copa (C)?

Suponemos sucesos elementales equiprobables, por lo que según la regla de Laplace:

P(R) = 4/40 = 1/10 (hay 4 casos favorables de un total de 40 cartas diferentes)

P(C) = 10/40 = 1/4 (hay 10 casos favorables de un total de 40 cartas diferentes)

Para obtener la probabilidad de sacar oro (O) o copa (C) podemos razonar de dos maneras distintas. Entre oros y copas hay 20 cartas de un total de 40, por lo tanto:

$P(O \cup C) = 20/40 = 1/2$

O bien podemos argumentar así: el suceso O "sacar oro" es incompatible con el suceso C "sacar copa" porque no hay cartas en común entre ambos sucesos. La probabilidad de sacar oro o copa es la probabilidad de la unión, que se calcula:

$P(O \cup C) = P(O) + P(C) - P(O \cap C) = 10/40 + 10/40 - 0 = 1/2$

Donde la probabilidad de la intersección es 0 por ser sucesos incompatibles.

Fíjate que la conjunción "o" se sustituye por el operador unión. Más adelante veremos que la conjunción "y" se sustituye por el operador intersección.

EJEMPLO 3

En una clase hay 15 chicos y 14 chicas. Se eligen dos alumnos al azar. ¿Qué probabilidad hay de que los dos alumnos elegidos sean chicas?

Tenemos dos experimentos aleatorios consecutivos.

El primero es elegir una chica entre un grupo de 29 alumnos. Según la regla de Laplace la probabilidad será 14/29 (casos favorables dividido por los casos posibles).

En el segundo experimento tendremos 13 chicas (hemos quitado la que salió elegida en el primer experimento) y un total de 28 alumnos. La probabilidad será 13/28.

Se tiene que cumplir el primer experimento y el segundo experimento. Cuando esto ocurre, la probabilidad total es el producto de ambas probabilidades.

$$P = \frac{14}{29} \cdot \frac{13}{28} = 0{,}22$$

La conjunción "y" implica una intersección en el lenguaje lógico, y la probabilidad de la intersección puede obtener como un producto de probabilidades. Pero esta frase final necesita de ciertas matizaciones, cuando hablemos de sucesos dependientes e independientes. Tiempo al tiempo.

EJEMPLO 4

Se sabe que las probabilidades de dos sucesos A y B son P(A)=0,5 y P(B)=0,7. También se sabe que la probabilidad de su intersección es 0,3. ¿Cuánto vale la probabilidad de la unión?

Según los axiomas de probabilidad:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}5 + 0{,}7 - 0{,}3 = 0{,}9$$

EJEMPLO 5

En una baraja española, ¿cuál es la probabilidad de elegir al azar una carta de bastos o que sea una figura?

Tenemos suceso A "elegir bastos" y el suceso B "elegir figura". La conjunción "o" del enunciado podemos sustituirla por el operador unión.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Probabilidad de bastos → P(A) = 10/40 = 1/4

Probabilidad de figura → Hay 12 figuras entre los cuatro palos → P(B) = 12/40 = 3/10

La intersección entre A y B da lugar a las cartas que son bastos y figura. Fíjate que la intersección lógica equivale a la conjunción "y" (ocurre A "y" ocurre B).

En total hay 3 cartas que sean figuras de bastos: sota de bastos, caballo de bastos y rey de bastos. La probabilidad de la intersección es: P(A ∩ B) = 3/40. Por lo tanto:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1/4 + 3/10 - 3/40 = 19/40$$

EJEMPLO 6

En una baraja española, ¿cuál es la probabilidad de elegir al azar una carta de bastos que no sea una figura?

Tenemos suceso A "elegir bastos" y el suceso B "elegir figura". Ahora buscamos que se cumpla A pero que no se cumpla B. Podemos razonar de dos formas.

Las cartas de bastos que no son figuras son siete. Por lo tanto, la probabilidad que nos piden es 7/40.

Otra forma de razonar es usando los axiomas y la probabilidad de la diferencia.

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

Como razonamos en el ejemplo anterior, P(A) = 1/4 mientras que P(A ∩ B) = 3/40.

Por lo tanto: $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 1/4 - 3/40 = 7/40$.

EJEMPLO 7

Sean dos sucesos A y B. Expresar, usando operaciones de sucesos, los siguientes casos:

a) Que no ocurra ninguno de los dos.

b) Que ocurra al menos uno de los dos.

c) Que ocurra B pero no ocurra A.

a) No puede ocurrir A ni B → Nuevamente cambiamos la conjunción "y" por la intersección → $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$.

b) Debe ocurrir A o bien B → Cambiamos "o" por el operador unión → $A \cup B$.

c) Debe ocurrir B y no debe ocurrir A. Cambiamos "y" por operador intersección y usamos el complementario de A → $B - A = B \cap \bar{A}$.

EJEMPLO 8

Lanzamos un dado de seis caras. El suceso A es "obtener un número mayor que 4" y el suceso B es "obtener un número par". Escribe:

a) Elementos de A

b) Elementos de B

c) Elementos de $A^c \cup B$

d) Elementos de $(A \cap B)^c$

e) Probabilidad $P(\bar{A} \cap \bar{B})$

f) Probabilidad $P(\bar{A} \cup \bar{B})$

a) A = {5, 6}

b) B = {2, 4, 6}

c) $A^c \cup B$→ El complementario de A es $A^c = \{1,2,3,4\}$. Al hacer la unión con B resulta → $A^c \cup B = \{1,2,3,4,6\}$.

d) La intersección de A y B son los elementos en común entre los dos → $A \cap B = \{6\}$ → La negación de la intersección queda$(A \cap B)^c = \overline{A \cap B} = \{1,2,3,4,5\}$.

e) $P(\bar{A} \cap \bar{B})$→ Por leyes de Morgan → $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B})$

Como vimos en los axiomas → $P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$

El suceso unión de A con B da lugar a los elementos {2, 4, 5, 6} → Por la regla de Laplace $P(A \cup B) = 4/6 = 2/3$.

Por lo tanto →$P(\overline{A \cup B}) = 1 - 2/3 = 1/3$

f) $P(\bar{A} \cup \bar{B})$→ Por leyes de Morgan → $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B})$

Por los axiomas → $P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$

La intersección de A y B da lugar al elemento {6} → Por Laplace → $P(A \cap B) = 1/6$

Por lo tanto → $P(\overline{A \cap B}) = 1 - 1/6 = 5/6$

EJEMPLO 9

En un centro escolar el 80% de los alumnos practica algún deporte. El 25% toca un instrumento musical. El 15% realiza ambas actividades. Calcula la probabilidad de que un alumno elegido al azar no realice ninguna de las actividades.

Suceso A: "practicar deporte" → P(A) = 0,8. El cociente de casos favorables entre casos totales da lugar a la frecuencia relativa. Y por la ley de los grandes números, la frecuencia relativa se aproxima al concepto de probabilidad

Suceso B: "tocar instrumento" → P(B) = 0,25.

Necesitamos que no se cumpla A y que no se cumpla B. Si cambiamos la conjunción "y" por el operador intersección →$P(\bar{A} \cap \bar{B})$

Según las leyes de Morgan → $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B})$

Según los axiomas de probabilidad → $P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$

La unión de dos sucesos siempre cumple: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Donde la probabilidad de intersección coincide con la probabilidad de que un alumno haga deporte y toque un instrumento (nuevamente, intercambiamos la conjunción "y" con el operador intersección) → $P(A \cap B) = 0{,}15$.

En consecuencia → $P(A \cup B) = 0{,}8 + 0{,}25 - 0{,}15 = 0{,}90$ → $P(\overline{A \cup B}) = 1 - 0{,}9 = 0{,}10$.

EJEMPLO 10

Sean A y B dos sucesos del mismo espacio muestral. Sabemos que p(A)=0.5, p(B)=0.4 y que la probabilidad de unión de ambos sucesos es 0.8. Determinar p(A/B).

En una probabilidad condicionada se cumple:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

La probabilidad de la intersección se obtiene de la relación de la probabilidad de la unión:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - p(A \cap B)$$

$$0.8 = 0.5 + 0.4 - p(A \cap B)$$

$$p(A \cap B) = 0.1$$

Sustituimos en la probabilidad condicionada:

$$P(A/B) = \frac{0.1}{0.4}$$

$$P(A/B) = 0.25 \rightarrow 25\%$$

EJEMPLO 11

Sean C y D dos sucesos del mismo espacio muestral. Sabemos que p(C)=0.3, p(D)=0.8 y que C y D son independientes. Determinar la probabilidad de la unión.

La probabilidad de la unión resulta:

$$P(C \cup D) = P(C) + P(D) - p(C \cap D)$$

Dos sucesos son independientes cuando las probabilidades condicionadas coinciden con la probabilidad total del suceso. Es decir:

$$P(C/D) = P(C) = 0.3$$

$$P(D/C) = P(D) = 0.8$$

En una probabilidad condicionada se cumple:

$$P(C/D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)}$$

$$P(C \cap D) = P(C/D) \cdot P(D)$$

$$P(C \cap D) = P(C) \cdot P(D) = 0.3 \times 0.8 = 0.24$$

Por lo tanto:

$$P(C \cup D) = P(C) + P(D) - p(C \cap D)$$

$$P(C \cup D) = 0.3 + 0.8 - 0.24 = 0.86 \rightarrow 86\%$$

EJEMPLO 12

Sean A y B dos sucesos independientes tales que la probabilidad de que ocurran ambos simultáneamente es 1/3 y la de que no ocurra ninguno de ellos es 1/6. Calcula p(A) y p(B).

Si los sucesos son independientes, la probabilidad total de cada suceso coincide con las probabilidades condicionadas. Es decir:

p(A)=p(A/B)=p(A/$\bar{B}$)

p(B)=p(B/A)=p(B/$\bar{A}$)

Asimismo, por ser independientes, la probabilidad de la intersección es directamente el producto de las probabilidades totales:

p($A \cap B$)=p(A)·p(B)

El enunciado afirma los siguientes datos:

p($A \cap B$)=1/3

p($\bar{A} \cap \bar{B}$)=1/6

Al ser independientes, llegamos a:

p(A)·p(B)=1/3

p($\bar{A}$)·p($\bar{B}$)=1/6

Un suceso y su complementario suman probabilidad unidad:

p(A)+p($\bar{A}$)=1 → p($\bar{A}$)=1-p(A)

p(B)+p($\bar{B}$)=1 → p($\bar{B}$)=1-p(B)

Por lo que llegamos al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} p(A) \cdot p(B) = 1/3 \\ \big(1-p(A)\big)\big(1-p(B)\big) = 1/6 \end{cases}$$

De la primera ecuación despejamos:

$$p(B) = \frac{1}{3 \cdot p(A)}$$

Llevamos este resultado a la segunda ecuación del sistema:

$$\big(1-p(A)\big)\left(1-\frac{1}{3 \cdot p(A)}\right) = 1/6$$

$$\big(1-p(A)\big)\left(\frac{3 \cdot p(A)-1}{3 \cdot p(A)}\right) = 1/6$$

$$6 \cdot \big(1-p(A)\big)(3 \cdot p(A)-1) = 3 \cdot P(A)$$

$$2 \cdot \big(1-p(A)\big)(3 \cdot p(A)-1) = P(A)$$

$$2 \cdot (3 \cdot p(A) - 1 - 3 \cdot [p(A)]^2 + p(A)) = p(A)$$

$$2 \cdot (4 \cdot p(A) - 1 - 3 \cdot [p(A)]^2) = p(A)$$

$$8 \cdot p(A) - 2 - 6 \cdot [p(A)]^2 = p(A)$$

$$0 = 6 \cdot [p(A)]^2 - 7 \cdot p(A) + 2$$

Llegando a dos soluciones:

$$p(A) = \frac{2}{3} \rightarrow p(B) = \frac{1}{3 \cdot p(A)} \rightarrow p(B) = \frac{1}{3 \cdot \frac{2}{3}} \rightarrow p(B) = \frac{1}{2}$$

$$p(A) = \frac{1}{2} \rightarrow p(B) = \frac{1}{3 \cdot p(A)} \rightarrow p(B) = \frac{1}{3 \cdot \frac{1}{2}} \rightarrow p(B) = \frac{2}{3}$$

EJEMPLO 13

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatoria. Sabemos que p(A)=4/9, p(B)=1/2 y p(A∪B)=13/18.

a) Comprobar si los sucesos A y B son independientes.

b) Calcular p($\bar{A}$/B).

Si los sucesos son independientes, la probabilidad total de cada suceso coincide con las probabilidades condicionadas. Es decir:

P(A)=P(A/B)=P(A/$\bar{B}$)

P(B)=P(B/A)=P(B/$\bar{A}$)

Asimismo, por ser independientes, la probabilidad de la intersección es directamente el producto de las probabilidades totales:

P($A \cap B$)=P(A)·P(B)

Trabajamos con la expresión de la probabilidad de la unión:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$\frac{13}{18} = \frac{4}{9} + \frac{1}{2} - p(A \cap B)$$

$$p(A \cap B) = \frac{2}{9}$$

Por otro lado, hacemos el producto p(A) con p(B):

$$p(A) \cdot p(B) = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{9}$$

Como el producto de las probabilidades totales coincide con la probabilidad de la intersección, ambos sucesos son independientes.

b) Si sin independientes, las probabilidades condicionadas coinciden con las probabilidades totales, por lo tanto:

$$p(\bar{A}) = p(\bar{A}/B) = p(\bar{A}/\bar{B})$$

Por lo tanto, como la suma de la probabilidad de A más la probabilidad de su complementario es igual a 1, obtenemos:

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$$

$$p(\bar{A}) = 1 - 4/9$$

$$p(\bar{A}) = 5/9$$

Conclusión:

$$p(\bar{A}/B) = p(\bar{A}) = 5/9$$