Congruencia entre triángulos

Definición

La idea detrás de *dos figuras congruentes* es que estas figuras tienen el mismo tamaño y la misma forma, independientemente de la posición en la que se encuentren. A continuación, los siguientes conceptos te permitirán precisar esta idea.

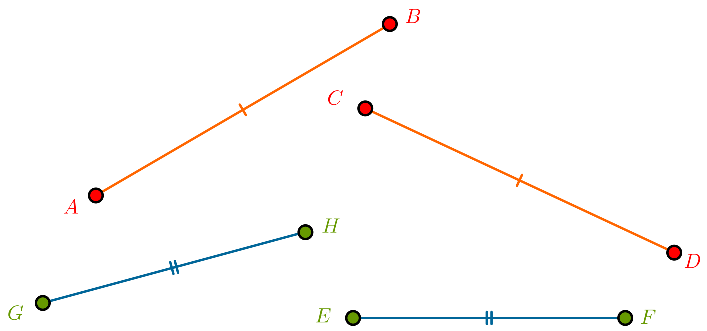
- Dos **segmentos son congruentes** si y solo si tienen la **misma longitud**. Dicho de otro modo, el segmento $\overline{AB}$ es **congruente** al segmento $\overline{CD}$ si y solo si

$$AB = CD.$$

Para indicar que el segmento $\overline{AB}$ es **congruente** al segmento $\overline{CD}$, escribirás

$$\overline{AB} \cong \overline{CD}.$$

Gráficamente lo expresarás de la siguiente manera:



En el dibujo estás indicando que

$$\overline{AB} \cong \overline{CD} \quad \text{y} \quad \overline{EF} \cong \overline{GH}.$$

- En resumen,

$$\overline{AB} \cong \overline{CD} \quad \text{ssi} \quad AB = CD.$$

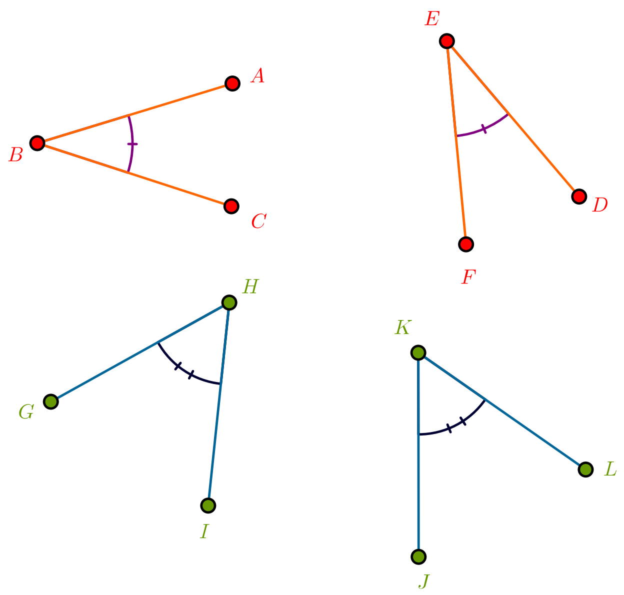
- Dos **ángulos son congruentes** si y solo si tienen la **misma medida**. De manera precisa, el ángulo $\angle ABC$ es **congruente** al ángulo $\angle DEF$ si y solo si

$$\mathrm{m}\angle ABC = \mathrm{m}\angle DEF$$

Para indicar que el ángulo $\angle ABC$ es **congruente** al ángulo $\angle DEF$ escribirás

$$\angle ABC \cong \angle DEF$$

Gráficamente lo expresarás de la siguiente manera:



En el dibujo has expresado que

$$\angle B \cong \angle E \quad \text{y} \quad \angle H \cong \angle K.$$

- En resumen,

$$\angle ABC \cong \angle DEF \quad \text{ssi} \quad \mathrm{m}\angle ABC = \mathrm{m}\angle DEF.$$

Atención

¡Congruencia no es lo mismo que igualdad!

En efecto, dos segmentos diferentes son congruentes cuando tienen la misma longitud; dos ángulos diferentes son congruentes cuando tienen la misma medida.

Propiedades

- **Propiedad reflexiva.**- Todo segmento es congruente consigo mismo:

$$\overline{AB} \cong \overline{AB}.$$

Todo ángulo es congruente consigo mismo:

$$\angle ABC \cong \angle ABC.$$

- **Propiedad simétrica.**- Si un segmento es congruente con otro, el segundo es congruente con el primero:

si

$$\overline{AB} \cong \overline{CD},$$

entonces

$$\overline{CD} \cong \overline{AB}.$$

Si un ángulo es congruente con otro, el segundo es congruente con el primero:

si

$$\angle ABC \cong \angle DEF,$$

entonces

$$\angle DEF \cong \angle ABC.$$

- **Propiedad transitiva**.- Si un segmento es congruente con un segundo segmento; y éste es congruente con un tercer segmento, entonces el primer segmento es congruente con el tercer segmento:

  si

  $$\overline{AB} \cong \overline{CD} \quad \text{y} \quad \overline{CD} \cong \overline{EF},$$

  entonces

  $$\overline{AB} \cong \overline{EF}.$$

  Si un ángulo es congruente con un segundo ángulo; y éste es congruente con un tercer ángulo, entonces el primer ángulo es congruente con el tercer ángulo:

  si

  $$\angle ABC \cong \angle DEF \quad \text{y} \quad \angle DEF \cong \angle GHI,$$

  entonces

  $$\angle ABC \cong \angle GHI.$$

- Toda relación que es **reflexiva**, **simétrica** y **transitiva** es denominada **relación de equivalencia**.

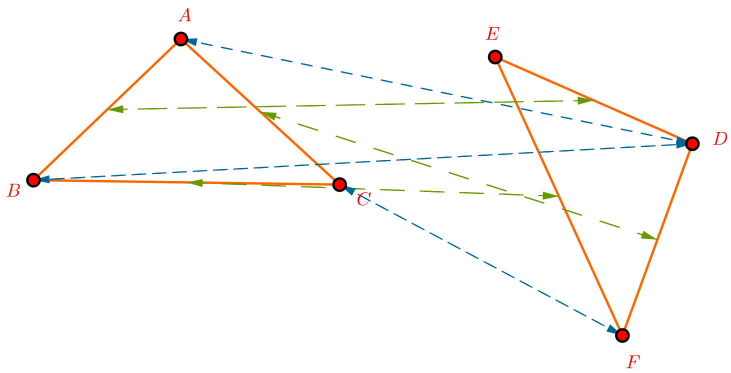
  Esto significa que la congruencia de segmentos y la congruencia de ángulos son relaciones de equivalencia.

  Por la propiedad simétrica, estás autorizado a decir *segmentos congruentes* o *ángulos congruentes* sin la necesidad de indicar los segmentos o ángulos en un orden específico.

Definición

- Hay una **correspondencia entre los triángulos** $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ si se establecen las siguientes correspondencias:
  - Entre los **vértices**: $A \longleftrightarrow D$, $B \longleftrightarrow E$ y $C \longleftrightarrow F$.
  - Entre los **lados**: $\overline{AB} \longleftrightarrow \overline{DE}$, $\overline{AC} \longleftrightarrow \overline{DF}$ y $\overline{BC} \longleftrightarrow \overline{EF}$.

– Entre los **ángulos**: $\angle A \longleftrightarrow \angle D$, $\angle B \longleftrightarrow \angle E$ y $\angle C \longleftrightarrow \angle F$.



Escribirás

$$\triangle ABC \longleftrightarrow \triangle DEF$$

para indicar la correspondencia entre los dos triángulos.

- Cuida de escribir los vértices de los triángulos en el orden adecuado, porque escribir

$$\triangle ABC \longleftrightarrow \triangle DEF$$

quiere decir que

$$A \longleftrightarrow D, \quad B \longleftrightarrow E \quad \text{y} \quad C \longleftrightarrow F.$$

Y esto determina también qué lados del un triángulo se corresponden a qué lados del otro, y qué ángulos del primero con qué ángulos del segundo.

- Una correspondencia entre dos triángulos es una **congruencia** si los pares de lados correspondientes son congruentes y los pares de ángulos correspondientes son congruentes.

De manera más precisa, la correspondencia

$$\triangle ABC \longleftrightarrow \triangle DEF$$

entre los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ es una **congruencia**, representada por

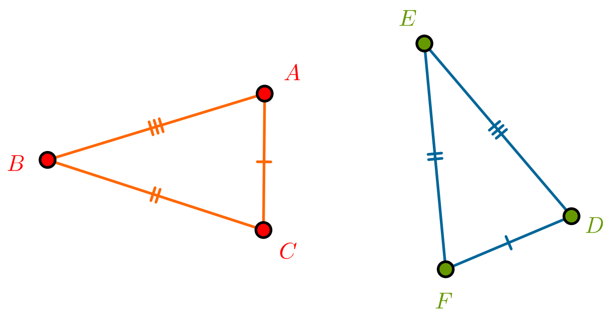
$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$

si y solo si se verifican las **seis** siguientes congruencias:

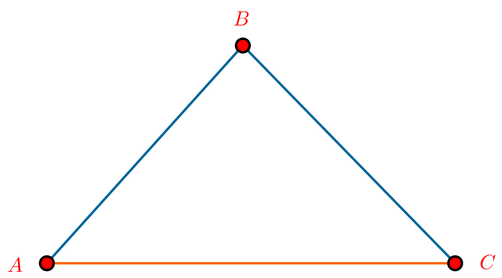
– $\overline{AB} \cong \overline{DE}$,
– $\overline{AC} \cong \overline{DF}$,
– $\overline{BC} \cong \overline{EF}$,
– $\angle A \cong \angle D$,
– $\angle B \cong \angle E$, y

– $\angle C \cong \angle F$.

Gráficamente, la congruencia de los triángulos será representada así:

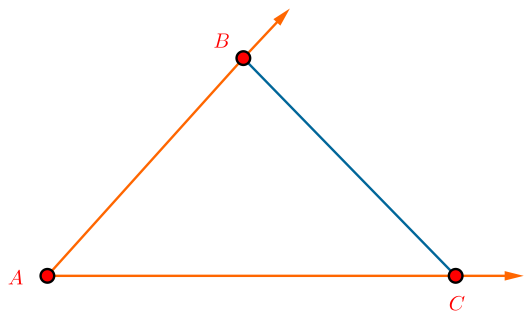


- Se dice que un **lado** de un triángulo está **comprendido** por los ángulos cuyos vértices son los extremos del segmento:



Por ejemplo, el lado $\overline{AC}$ está comprendido por los ángulos $\angle A$ y $\angle C$.

- Se dice que un **ángulo** de un triángulo está **comprendido** por los lados del triángulo que están en los lados del ángulo:



Por ejemplo, el ángulo $\angle A$ está comprendido por los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.

Propiedades

La congruencia entre triángulos es una relación de equivalencia; es decir, la relación de congruencia es:

- **Reflexiva**: todo triángulo es congruente consigo mismo. En otras palabras:

$$\triangle ABC \cong \triangle ABC.$$

- **Simétrica**: si un triángulo es congruente con otro, el segundo es congruente con el primero.

  Dicho de otro modo:

  si
  $$\triangle ABC \cong \triangle DEF,$$
  entonces
  $$\triangle DEF \cong \triangle ABC.$$

- **Transitiva**: si un triángulo es congruente con otro; éste con un tercero; entonces, el primero es congruente con el tercero.

  Es decir:

  si
  $$\triangle ABC \cong \triangle DEF \quad \text{y} \quad \triangle DEF \cong \triangle GHI,$$
  entonces
  $$\triangle ABC \cong \triangle GHI.$$

Criterio

Criterio LAL (Lado–Ángulo–Lado)

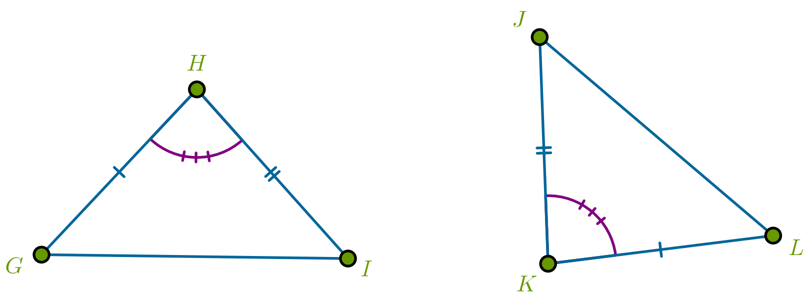
Dada una correspondencia entre dos triángulos, si los dos lados y el ángulo comprendido por estos en el primer triángulo son congruentes con los lados y el ángulo correspondientes del otro triángulo, la correspondencia es una congruencia.

De manera más precisa, dada la correspondencia $\triangle ABC \longleftrightarrow \triangle DEF$, si

- $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ (**L**),
- $\angle A \cong \angle D$ (**A**),
- $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ (**L**),

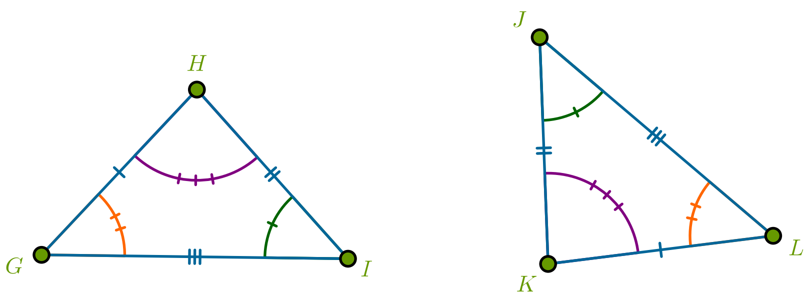
entonces

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF.$$



Esto quiere decir que también se verifican las siguientes congruencias:

- $\overline{BC} \cong \overline{EF}$,
- $\angle B \cong \angle E$,
- $\angle C \cong \angle F$.



Criterio

Criterio ALA (Ángulo–Lado–Ángulo)

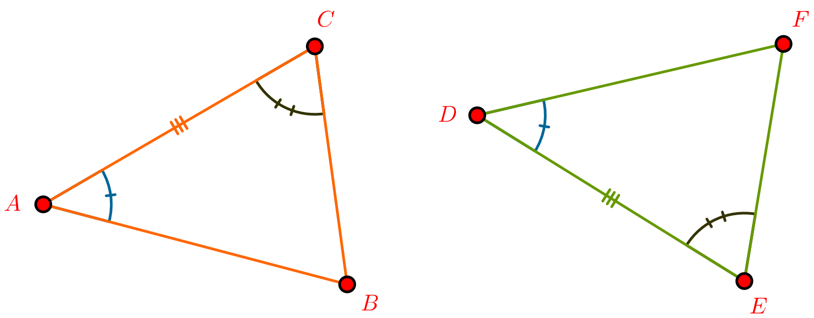
> Dada una correspondencia entre dos triángulos, si los dos ángulos y el lado comprendido por estos en el primer triángulo son congruentes con los ángulos y el lado correspondientes del otro triángulo, la correspondencia es una congruencia.

De manera más precisa, dada la correspondencia $\triangle ABC \longleftrightarrow \triangle DEF$, si

- $\angle A \cong \angle D$ (**A**),
- $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ (**L**),
- $\angle B \cong \angle E$ (**A**),

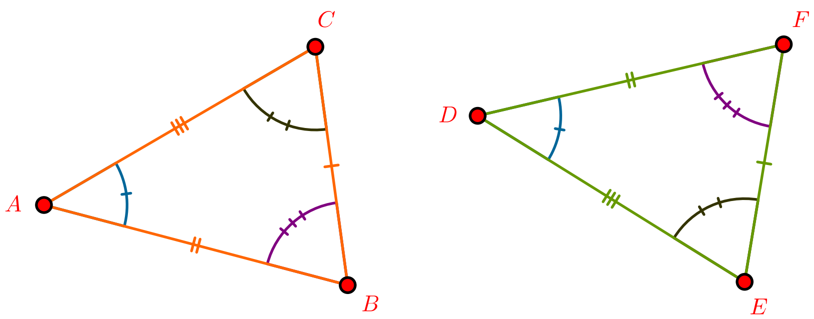
entonces

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF.$$



Esto quiere decir que también se verifican las siguientes congruencias:

- $\triangle BC \cong \triangle EF$,
- $\triangle AC \cong \triangle DF$,
- $\angle C \cong \angle F$.



Criterio

Criterio LLL (Lado–Lado–Lado)

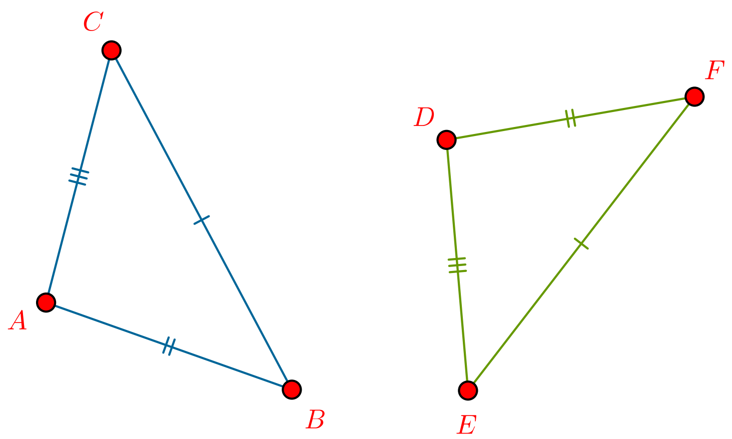
Dada una correspondencia entre dos triángulos, si los tres lados del primer triángulo son congruentes con los tres lados correspondientes del otro triángulo, la correspondencia es una congruencia.

De manera más precisa, dada la correspondencia $\triangle ABC \longleftrightarrow \triangle DEF$, si

- $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ (**L**),
- $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ (**L**),
- $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ (**L**),

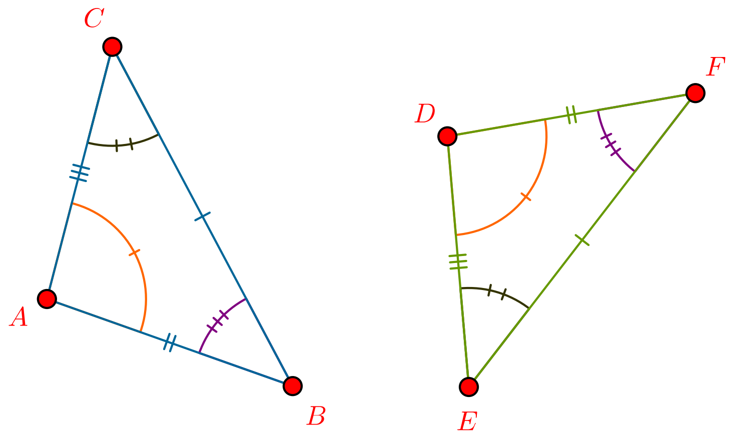
entonces

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF.$$



Esto quiere decir que también se verifican las siguientes congruencias:

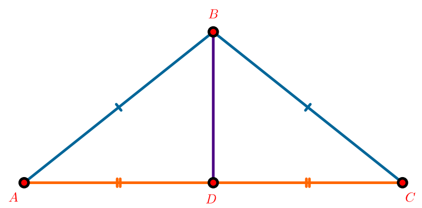
- $\angle A \cong \angle D$,
- $\angle B \cong \angle E$,
- $\angle C \cong \angle F$.



Ejercicio

En el triángulo $\triangle ABC$ los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son congruentes. Sea D el punto medio del lado $\overline{AC}$. Demuestra que los ángulos $\angle A$ y $\angle C$ son congruentes.

Demostración. En primer lugar, representa gráficamente el problema:

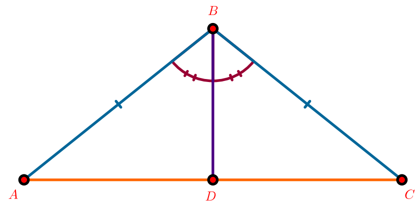


[1]	$\overline{AB} \cong \overline{DE}$	Hipótesis
[2]	$\overline{AD} \cong \overline{CD}$	Hipótesis: D es punto medio del lado $\overline{AC}$
[3]	$\overline{BD} \cong \overline{BD}$	Propiedad reflexiva de la congruencia de segmentos
[4]	$\triangle ABD \cong \triangle CBD$	Criterio LLL aplicado a [1], [2] y [3]
[5]	$\angle A \cong \angle C$	Definición de congruencia de triángulos aplicada a [4].

Ejercicio

En un triángulo $\triangle ABC$, los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son congruentes, D es un punto en el lado $\overline{AC}$, diferente de los extremos, y los ángulos $\angle ABD$ y $\angle CBD$ son congruentes. Demuestra que el punto D es punto medio del lado $\overline{AC}$.

Demostración. Como siempre, realiza primero una representación gráfica del problema:



[1] $\overline{AB} \cong \overline{CB}$ Hipótesis

[2] $\angle ABC \cong \angle CBD$ Hipótesis

[3] $\overline{BD} \cong \overline{BD}$ Propiedad reflexiva de la congruencia de segmentos

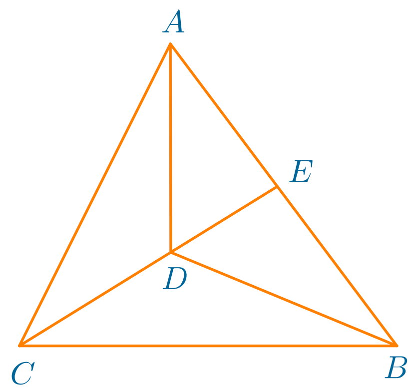
[4] $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ Criterio LAL aplicado a [1], [2] y [3]

[5] $\overline{AC} \cong \overline{CD}$ Definición de congruencia de triángulos aplicada a [4]

[6] D es punto medio del lado $\overline{AC}$ Definición de punto medio aplicada a [5].

Ejercicio

Con respecto a la figura:



Supón que

$$AC = BC \quad \text{y} \quad AE = BE. \tag{1}$$

Demuestra que

$$\overline{AD} \cong \overline{BD}$$

Demostración. Considera la siguiente correspondencia

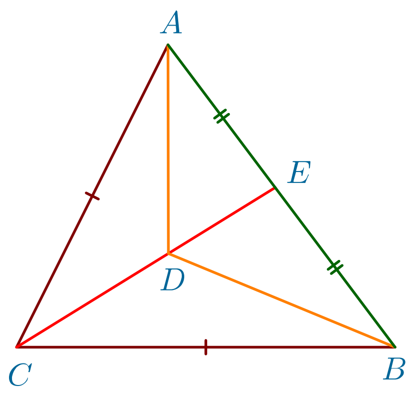
$$\triangle ACE \longleftrightarrow \triangle BCE.$$

Las hipótesis (1) aseguran que:

$$\overline{AC} \cong \overline{BC} \quad \text{y} \quad \overline{AE} \cong \overline{BE}. \tag{2}$$

Además, por la propiedad reflexiva de la congruencia de segmentos, tienes que

$$\overline{CE} \cong \overline{CE}: \tag{3}$$



Por tanto, por el criterio de congruencia LLL aplicado a (2) y (3) tienes que

$$\triangle ACE \cong \triangle BCE,$$

de donde obtienes que

$$\angle ACE \cong \angle BCE. \tag{4}$$

Ahora considera la correspondencia

$$\triangle ACD \longleftrightarrow \triangle BCD.$$

Entonces por la primera igualdad de la hipótesis (1), tienes que

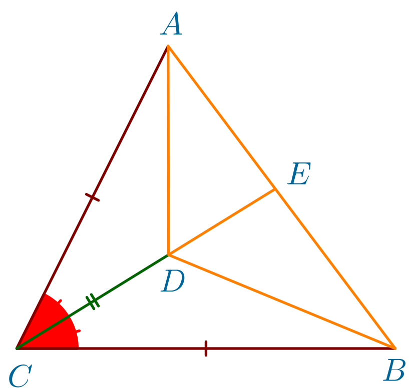
$$\overline{AC} \cong \overline{BC}. \tag{5}$$

Por (4), tienes que

$$\angle ACD \cong \angle BCD \tag{6}$$

Y nuevamente por la propiedad reflexiva de la congruencia de segmentos, se verifica

$$\overline{CD} \cong \overline{CD}: \tag{7}$$



Luego, por el criterio de congruencia *LAL* aplicado a (5), (6) y (7), concluyes que

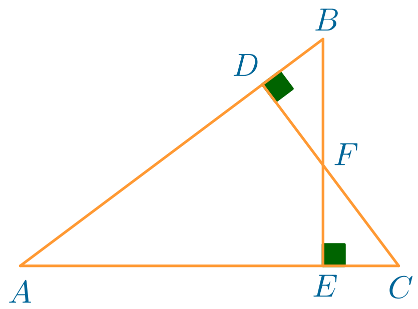
$$\triangle ACD \cong \triangle BCD,$$

de donde obtienes que

$$\overline{AD} \cong \overline{BD}.$$

Ejercicio

Con respecto a la figura



supón que

$$\overline{CD} \perp \overline{AB}, \tag{8}$$
$$\overline{BE} \perp \overline{AC}, \tag{9}$$
$$\overline{EF} \cong \overline{DF}. \tag{10}$$

Demuestra que

$$\overline{AB} \cong \overline{AC}.$$

Demostración. Considera la siguiente correspondencia:

$$\triangle BFD \longleftrightarrow \triangle CFE$$

Por las hipótesis (8) y (9), respectivamente, tienes que los ángulos

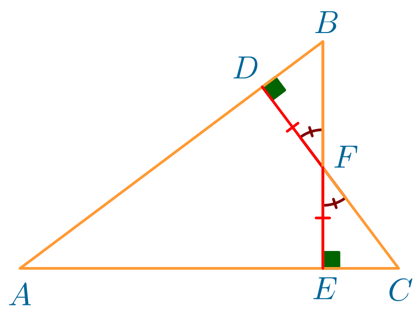
$$\angle FDB \quad \text{y} \quad \angle FEC$$

son rectos. Luego

$$\angle FDB \cong \angle FEC. \tag{11}$$

Por otro lado, por ser opuestos por el vértice, tienes que

$$\angle BFD \cong \angle CFE. \tag{12}$$

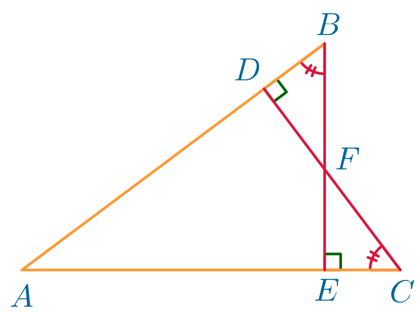


Por tanto, por el criterio de congruencia de triángulos *ALA*, aplicado a (11), (10) y (12), tienes que

$$\triangle BFD \cong \triangle CFE,$$

de donde

$$\overline{BF} \cong \overline{FC} \tag{13}$$
$$\angle DBF \cong \angle ECF. \tag{14}$$



Ahora considera esta otra correspondencia:

$$\triangle ABE \longleftrightarrow \triangle ACD.$$

De (14) tienes que

$$\angle ABE \cong \angle ACD. \tag{15}$$

Y, como los ángulos

$$\angle AEB \quad \text{y} \quad \angle ADC$$

son rectos, entonces también son congruentes entre sí:

$$\angle AEB \cong \angle ADC. \tag{16}$$

Finalmente, de (13) y (10), respectivamente, tenemos que

$$BF = FCydsFE = DF,$$

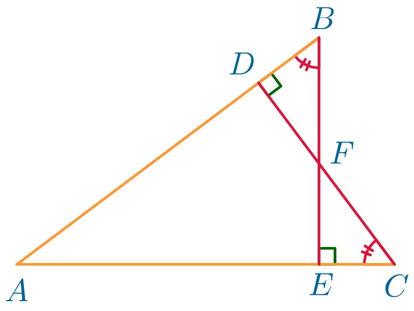
de donde

$$\begin{aligned} BE &= BF + FE \\ &= FC + DF \end{aligned}$$

$$= DF + FC = DC;$$

es decir,

$$\overline{BE} \cong \overline{DC}. \tag{17}$$



Por tanto, por el criterio de congruencia de triángulos *ALA* aplicado a (15), (17) y (16), obtienes que

$$\triangle ABE \cong \triangle ACD,$$

de donde concluyes que

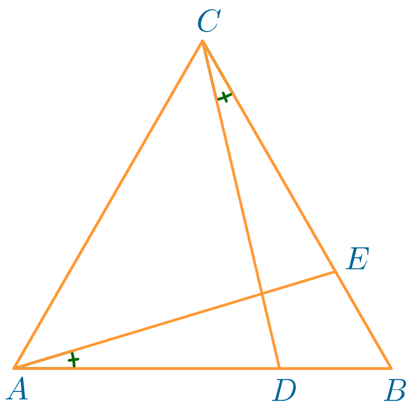
$$\overline{AB} \cong \overline{AC},$$

que es lo que debías demostrar.

Ejercicio

Sea $\triangle ABC$ un triángulo equilátero. Supón que D y E son puntos en los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CB}$, respectivamente, y distintos de los extremos, tales que los ángulos $\angle BAE$ y BCD son congruentes entre sí. Demuestra que los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{CE}$ son congruentes entre sí.

Demostración. En primer lugar, haz un dibujo que represente el problema:



Por hipótesis, tienes que

$$\angle BAE \cong \angle BCD- \tag{18}$$

Debes demostrar que

$$\overline{AD} \cong \overline{CE}.$$

Para ello, considera la siguiente correspondencia:

$$\triangle ADC \longleftrightarrow \triangle CEA.$$

En primer lugar, por ser $\triangle ABC$ un triángulo equilátero, también tiene los tres ángulos congruentes entre sí; por tanto, tienes que

$$\angle CAD \cong \angle ACE. \tag{19}$$

Por la propiedad simétrica de la congruencia de segmentos, tienes que

$$\overline{AC} \cong \overline{AC}. \tag{20}$$

Por otro lado, tienes que

$$\mathrm{m}\,\angle BAC = \mathrm{m}\,\angle BAE + \mathrm{m}\,\angle EAC,$$

de donde, por (18), tienes que

$$\mathrm{m}\,\angle BAC = \mathrm{m}\,\angle BCD + \mathrm{m}\,\angle EAC. \tag{21}$$

Por otro lado, por ser el triángulo equilátero, sus tres ángulos son congruentes entre sí; luego,

$$\mathrm{m}\,\angle BAC = \mathrm{m}\,\angle ECA,$$

de donde, por (21):

$$\mathrm{m}\,\angle ECA = \mathrm{m}\,\angle BCD + \mathrm{m}\,\angle EAC. \tag{22}$$

También tienes que

$$\mathrm{m}\,\angle ECA = \mathrm{m}\,\angle BCD + \mathrm{m}\,\angle DCA,$$

de donde, por (22), obtienes que

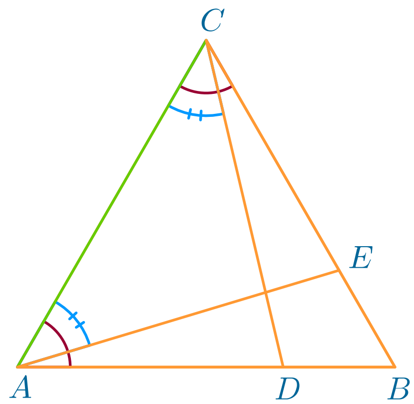
$$\mathrm{m}\,\angle BCD + \mathrm{m}\,\angle DCA = \mathrm{m}\,\angle BCD + \mathrm{m}\,\angle EAC;$$

es decir,

$$\mathrm{m}\,\angle DCA = \mathrm{m}\,\angle EAC.$$

En otras palabras, se verifica que

$$\angle DCA \cong \angle EAC. \tag{23}$$



Entonces, por el criterio de congruencia de triángulo ALA, aplicado a (19), (21) y (23), tienes que

$$\triangle ADC \cong \triangle CEA,$$

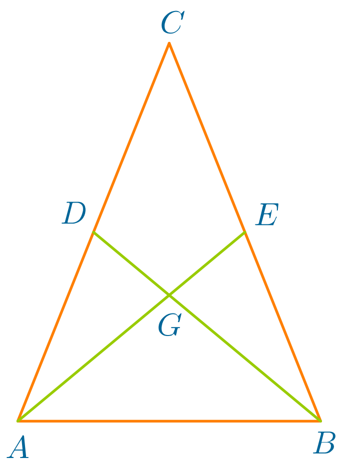
con lo que ya puedes concluir que

$$\overline{AD} \cong \overline{CE}.$$

Ejercicio

Sea G el baricentro del triángulo ABC tal que $AB = BG$. Demuestra que $\overline{AC} \cong \overline{BC}$.

Demostración. En primer lugar, realiza un dibujo que represente el problema:



Como hipótesis, tienes que

$$AG = BG. \tag{24}$$

Tienes que demostrar que

$$\overline{AC} \cong \overline{BC}.$$

Para ello, considera la correspondencia siguiente:

$$\triangle AEB \longleftrightarrow \triangle BDA.$$

Por la *propiedad de las medianas y el baricentro*, sabes que

$$AG = 2EG \quad \text{y} \quad BF = 2DG.$$

Por tanto, de (24), tienes que

$$2EG = 2DG$$

de donde

$$EG = DG$$

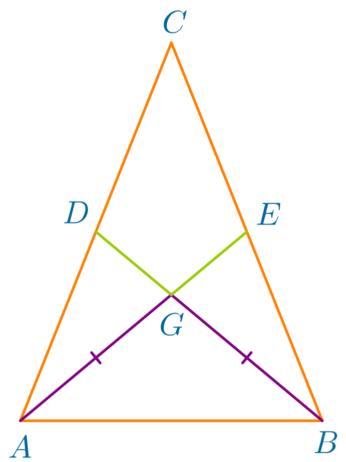
que, junto con (24), obtienes lo siguiente:

$$\begin{aligned} AE &= AG + GE \\ &= BG + DG = BD; \end{aligned}$$

Es decir,

$$\overline{AE} \cong \overline{BD}. \tag{25}$$

Por otra parte, por (24), el triángulo $\triangle$ es isósceles:



Luego, tienes que

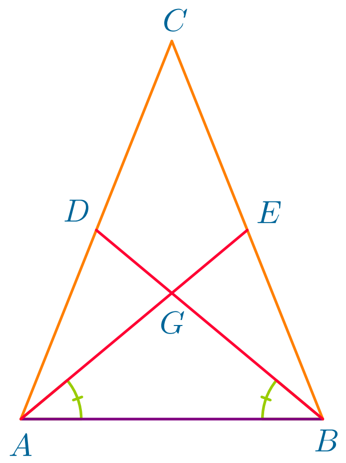
$$\angle ABG \cong \angle BAG;$$

o, lo que es lo mismo, tienes que

$$\angle BAE \cong \angle ABD. \tag{26}$$

Finalmente, por la propiedad simétrica de la congruencia de segmentos:

$$\overline{AB} \cong \overline{BA}. \tag{27}$$



Por tanto, por el criterio de congruencia *LAL* aplicado a (19), (20) y (21), tienes que

$$\triangle AEB \cong \triangle BDA,$$

de donde

$$\angle EBA \cong \angle DBA,$$

que es lo mismo que

$$\angle CBA \cong \angle CAB,$$

lo que implica que el triángulo es isósceles:

$$\overline{AC} \cong \overline{BC}.$$