Mechanická výchova

Rovnoměrný pohyb po kružnici

Žán Pól Kastról

24. ledna 2022

1 ROVNOMĚRNÝ POHYB PO KRUŽNICI

Vezměmež hmotný bod M, který se pohybuje po kružnici o poloměru r rychlostí, která má konstantní velikost v. Takový pohyb se nazývá *rovnoměrný pohyb po kružnici* ($\mathcal{RPPK}$). Je to **nejjednodušší křivočarý pohyb**. Zároveň je to *kmitavý periodický pohyb* – kmitavé pohyby budeme studovat detailně později.

Polohový vektor a vektor okamžité rychlosti

Bodu M přiřadíme *polohový vektor* $\vec{\boldsymbol{r}} = \overrightarrow{SM}$, který bod M provází na jeho cestě za dobrodružstvím, takže mu říkáme také *průvodič* bodu M. (obr.1).

Vektor okamžité rychlosti $\vec{\boldsymbol{v}}$ bodu M má dle definice **stálou velikost** v, ale jeho **směr se v čase mění**. Tento směr je určen tečnou k dané kružnici v bodě M. Vektor rychlosti $\vec{\boldsymbol{v}}$ je tedy vždy kolmý na průvodič $\vec{\boldsymbol{r}}$.

Kolmost těchto vektorů můžeme nahlédnout intuitivně pomocí limitního visionářství:

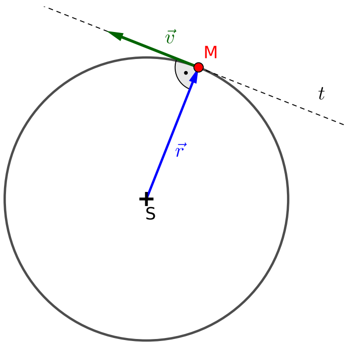
Varianta 1: V obrázku obr.2a jsou vyznačeny dvě polohy bodu M (body M_1, M_2) a jejich polohové vektory $\vec{\boldsymbol{r}}_1, \vec{\boldsymbol{r}}_2$. Dále je zde vyznačen vektor $\Delta\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}_2 - \vec{\boldsymbol{r}}_1$, což je **vektor posunutí** na obloukové trajektorii mezi body M_1M_2.

Pro **průměrnou rychlost definovanou vektorově** (*average velocity*) platí vztah

$$\vec{\boldsymbol{v}}_{\text{prum}} = \frac{\Delta\vec{\boldsymbol{r}}}{\Delta t} \tag{1}$$

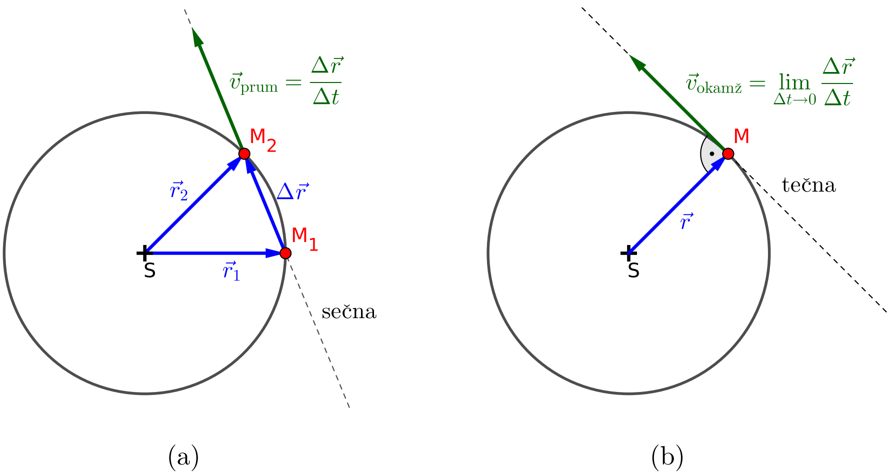
Protože jsme dělili vektor posunutí kladným číslem Δt, má průměrná rychlost stejný směr (a orientaci) jako tento vektor posunutí, tedy směr **sečny** M_1M_2.

Vektor průměrné rychlosti $\vec{\boldsymbol{v}}_{\text{prum}}$ počítaný z úseku M_1M_2 nám může dát přibližnou představu o vektoru okamžité rychlosti $\vec{\boldsymbol{v}}_{\text{okamž}}$ v bodě M_2. Chceme-li dostat přesnější aproximaci, musíme úsek M_1M_2 zkrátit, tedy bod M_1 posunout blíže k bodu M_2. Další zpřesnění dostaneme dalším přiblížením, další dalším atd. Při tomto



Obr. 1:

https://ggbm.at/m7g9hp23



Obr. 2:

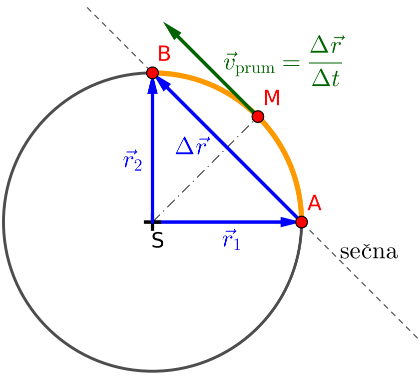
https://ggbm.at/vh5q9adr

limitním procesu se bod M_1 čím dále tím více přibližuje k bodu M_2, časový úsek Δt, za který pohybující se hmotný bod urazí obloučkovou trajektorii mezi body M_1 a M_2 se zkracuje a sečna M_1M_2 se stále více přibližuje k tečně v bodě M_2 (viz odkaz na aplet u obrázku). Přesnou hodnotu **okamžitého vektoru rychlosti** tedy dostaneme jako limitu:

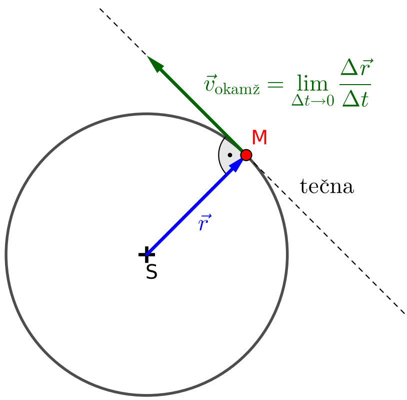
$$\vec{\boldsymbol{v}}_{\text{okamž}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\boldsymbol{r}}}{\Delta t} \tag{2}$$

V limitě sečna přejde v tečnu a vektor okamžité rychlosti bude kolmý na průvodič (obr.2b).

Varianta 2: Úvahu ve variantě 1 lze použít nejen pro kruhovou trajektorii, ale i obecně pro jakoukoli (rozumnou) křivočarou trajektorii. V případě kruhové trajektorie můžeme uvažovat také tak, že vezmeme bod M, který je středem oblouku AB (viz obr.3). Oblouk AB postupně zmenšujeme tak, že M zůstává jeho středem. Sečna AB je tak už od začátku kolmá ma SM a postupně přejde v tečnu. Vektor okamžité rychlosti v M je proto kolmý k průvodiči $\vec{\boldsymbol{r}}$.



(a)



(b)

Obr. 3:

https://ggbm.at/z8jtfsvm

Naše intuitivní představy snadno ověříme přesně. Vztah (2) představuje derivaci polohového vektoru podle času.

$$\vec{\boldsymbol{v}}_{\text{okamž}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\boldsymbol{r}}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t} \tag{3}$$

Polohový vektor má souřadnice

$$\vec{\boldsymbol{r}} = (r\cos\omega t; r\sin\omega t)$$

Když ho zderivujeme podle času, dostaneme vektor okamžité rychlosti:

$$\vec{\boldsymbol{v}} = (-r\omega\sin\omega t; r\omega\cos\omega t)$$

Skalární součin těchto vektorů je

$$\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = -r^2\omega\sin\omega\cos\omega + r^2\omega\sin\omega\cos\omega = 0$$

Z toho plyne, že $\vec{\boldsymbol{v}}$ a $\vec{\boldsymbol{r}}$ jsou vskutku na sebe kolmé.

Obvodová a úhlová rychlost

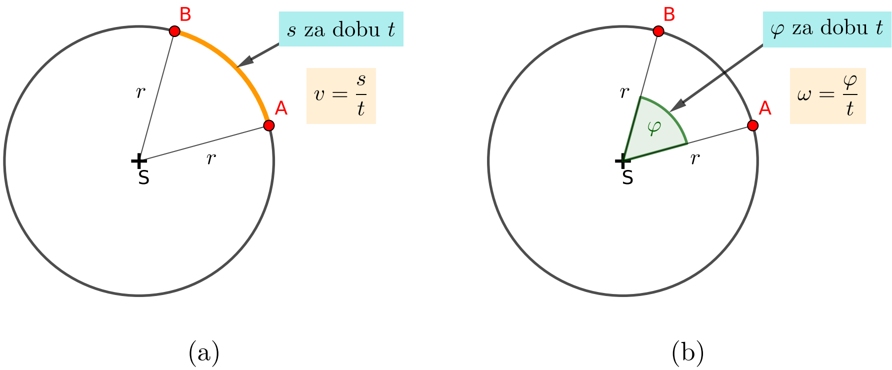
Víme, že velikost vektoru okamžité rychlosti $\mathcal{RPPK}$ je konstantní a značíme ji v. Protože se touto rychlostí pohybuje těleso po **obvodu kružnice**, budeme jí říkat **obvodová rychlost**. Pač se jedná o **rovonoměrný** pohyb, platí pro v známý vztah

$$\boxed{v = \frac{s}{t} \quad (\text{obvodová rychlost } \mathcal{RPPK})} \tag{4}$$

kde s je dráha (zde délka kruhového oblouku) uražená za dobu t (obr.4a).

Těleso na na cestě z A do B urazilo za dobu t nejen dráhu s, ale její průvodič opsal také úhel φ (matematicky – středový úhel příslušný k oblouku AB) (obr.4b). Proto můžeme zavést nový druh rychlosti – **úhlovou rychlost**. Definice je analogická definici obvodové rychlosti:

$$\boxed{\omega = \frac{\varphi}{t} \quad (\text{úhlová rychlost } \mathcal{RPPK})} \tag{5}$$



Obr. 4: Obvodová a úhlová rychlost

kde φ je **úhel v radiánech** uražený průvodičem tělesa za dobu t. Jednotkou úhlové rychlosti je tedy **radián za sekundu**. Protože *radián* má jednotkově rozměr 1 (úhel měřený v obloukové míře je **poměr** délky oblouku kružnice ku jejímu poloměru – jednotky *metr* se vykrátí; $[\varphi] = 1$), říkáme, že jednotkou úhlové rychlosti je sekunda na mínus první, čili jeden Hertz.

$$\boxed{[\omega] = \frac{1}{\mathrm{s}} = \mathrm{s}^{-1} = 1\mathrm{Hz} \quad \left(\text{jednotka úhlové rychlosti}\right)} \tag{6}$$

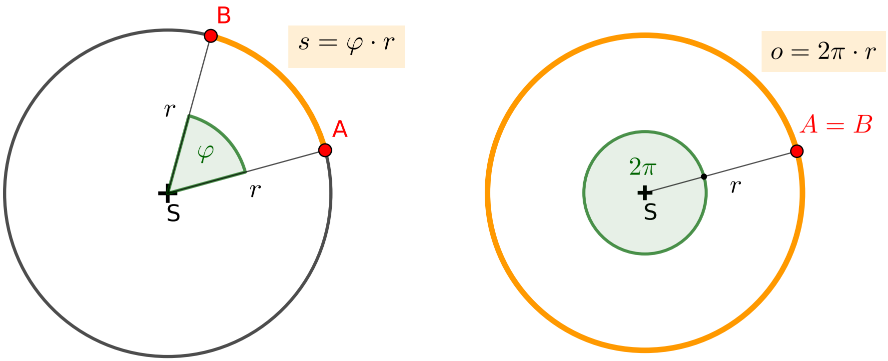
Urazí-li těleso například za 1 sekundu dráhu odpovídající půlkružnici, je $\varphi = \pi$ a jeho úhlová rychlost je π radiánů za sekundu, tedy $\omega \doteq 3{,}14\,\mathrm{s}^{-1}$, tedy $\omega \doteq 3{,}14\,\mathrm{Hz}$. Nebo je-li úhlová rychlost $\omega = 1\,\mathrm{Hz}$, znamená to, že těleso urazí 1 radián za sekundu, tedy ve stupních přibližně 57°.

Vztah mezi obvodovou a úhlovou rychlostí: Každej blbec zná asi vztah „es je fír“! Neboli vztah pro délku kruhového oblouku.

$$\boxed{s = \varphi \cdot r \quad \left(\text{délka kruhového oblouku}\right)} \tag{7}$$

kde φ je velikost středového úhlu (**v radiánech!**) příslušejícího oblouku délky s na kružnici o poloměru r (obr.5a). Každej blbec asi taky ví, že špecielním případem tohoto vztahu je vzorec pro délku kružnice „ó je dvě pír“ (obr.5b), tedy vztah

$$\boxed{o = 2\pi \cdot r \quad \text{(délka kružnice)}} \tag{8}$$



(a) **„es je fír“**

(b) **„ó je dvě pír“**

Obr. 5: Obecný a špecielní případ vztahu pro délku kruhového oblouku

Dosadíme-li vztah (7) do vztahu (4), dostáváme

$$v = \frac{s}{t} = \frac{\varphi \cdot r}{t} = \frac{\varphi}{t} \cdot r = \omega \cdot r$$

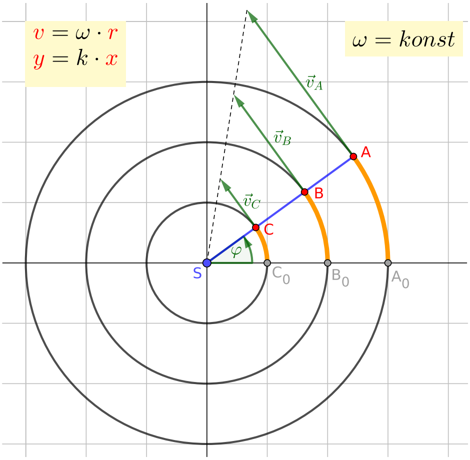
Dostali jsme úžasý vztah „vé je omegar“:

$$\boxed{v = \omega \cdot r \quad \text{(vztah mezi obvodovou a úhlovou rychlostí 1.)}} \tag{9}$$

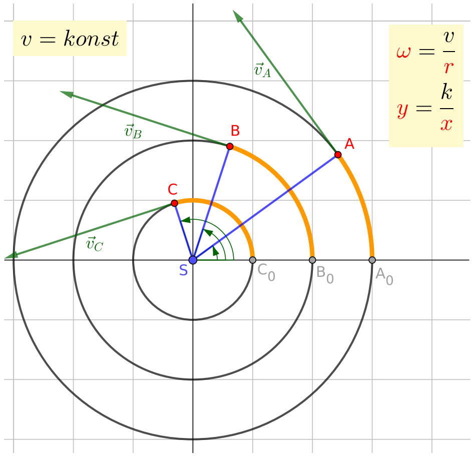
Odtud dostáváme „omega je vékur“:

$$\boxed{\omega = \frac{v}{r} \quad \text{(vztah mezi obvodovou a úhlovou rychlostí 2.)}} \tag{10}$$

Rozdíl mezi obvodovou a úhlovou rychlostí: Jestliže ve vztahu (9) ponecháme úhlovou rychlost konstantní ($\omega = konst$), dostáváme **přímou úměrnost** mezi v a r (tedy $v = konst \cdot r$).



(a) $\omega = konst \Rightarrow v$ přímo úměr. r



(b) $v = konst \Rightarrow \omega$ nepřímo úměr. r

https://ggbm.at/xvqfgnex

https://ggbm.at/agnsfavb

Obr. 6: Rozdíl mezi obvodovou a úhlovou rychlostí

Konkrétně si můžeme představit rotující kolo *velocipédu* (neboli *rychlé nohy*, čili *bicyklu* alias *dvojkolky*) a sledovat 3 body drátu A, B, C v různých vzdálenostech od středu rotace S (viz obr.6a). Všechny tři body mají **stejnou úhlovou rychlost** ω, pač za stejnou dobu urazí **stejný úhel**. Bod A je však na největším poloměru, takže urazí největší dráhu. Proto má největší obvodovou rychlost! Bod C je na nejmenším poloměru, takže urazí nejmenší dráhu. Proto má nejmenší obvodovou rychlost! **Čím větší poloměr, tím větší je (při konstantním ω)**

obvodová rychlost.

$$\omega_A = \omega_B = \omega_C$$
$$r_A > r_B > r_C$$
$$v_A > v_B > v_C$$

Jestliže ve vztahu (10) ponecháme obvodovou rychlost konstantní ($v = konst$), dostáváme **nepřímou úměrnost** mezi ω a r (tedy $\omega = \frac{konst}{r}$).

Konkrétně si můžeme představit tři stejně dobré závodníky A, B, C, kteří běží na soustředných kruhových tratích stejnou obvodovou rychlostí, ale na různých poloměrech (viz obr.(6b)). Za stejnou dobu urazí **stejné dráhy**, ale **různé úhly**. Závodník A běží na největším poloměru, takže urazí nejmenší úhel. Proto má nejmenší úhlovou rychlost. **Čím větší poloměr, tím menší je (při konstantní v) úhlová rychlost.**

$$v_A = v_B = v_C$$
$$r_A > r_B > r_C$$
$$\omega_A < \omega_B < \omega_C$$

Kmit, perioda a frekvence

Víme, že pohyb po kružnici je kmitavý pohyb, který je **periodický**. Tedy určitý úsek pohybu se neustále přesně **opakuje**. Tomuto úseku pohybu říkáme **kmit**.

U pohybu po kružnici je tedy kmitem jeden oběh kružnice. (U kyvadla je to například pohyb z jedné krajní polohy do druhé a zpět, u závaží na pružině je to pohyb např. z rovnovážné polohy do nejnižší, do nejvyšší a zpět do rovnovážné.)

Doba, za kterou vykoná těleso jeden kmit, se nazývá **perioda**. U pohybu po kružnici jí také říkáme **doba oběhu**.

Perioda se značí T a její jednotkou je samozřejmě sekunda.

$$[T] = 1\,\mathrm{s}$$

Počet kmitů, které částice vykoná za sekundu, se nazývá **kmitočet** (odvozeno od „kmitů počet“) nebo také **frekvence**.

Frekvence se značí f a dle její definice platí

$$\boxed{f = \frac{N}{t} \quad \text{(definice frekvence)}} \tag{11}$$

kde t je doba, po kterou počítáme kmity a N je počet kmitů, které za tuto dobu napočítáme. Protože N je bezrozměrná veličina, musí být jednotkou frekvence zřejmě sekunda na minus první. Na počest Heinrichu Hertzovi[1] byla tato jednotka pojmenována *hertz*.

$$[f] = 1\,\mathrm{s}^{-1} = 1\,\mathrm{Hz}$$

V případě pohybu po kružnici se často udává frekvence jako **počet otáček za minutu**. (Např. říkáme, že nějaký motor má 1000 otáček za minutu.)

Vykoná-li těleso jeden kmit, je $t = T$ a $N = 1$. Dosadíme-li tyto hodnoty do definice frekvence (11), dostáváme vztah mezi prekvencí a periodou:

$$\boxed{f = \frac{1}{T} \quad \text{nebo} \quad T = \frac{1}{f} \quad \text{(vztah mezi frekvencí a periodou)}} \tag{12}$$

Vykoná-li těleso jeden kmit, potom uplyne čas $t = T = \frac{1}{f}$ a těleso urazí dráhu $s = 2\pi r$. Dosadíme-li tyto hodnoty do vztahu (4) pro obvodovou rychlost, dostaneme

$$\boxed{v = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r f \quad (\text{vztah mezi } v, T, f)} \tag{13}$$

[1]https://cs.wikipedia.org/wiki/Heinrich_Hertz

Vykoná-li těleso jeden kmit, potom uplyne čas $t = T = \frac{1}{f}$ a průvodič tělesa opíše úhel $\varphi = 2\pi$. Dosadíme-li tyto hodnoty do vztahu (5) pro úhlovou rychlost, dostaneme

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad \text{(vztah mezi } \omega, T, f\text{)}} \tag{14}$$

Porovnáme-li ztahy (13) a (14), krástně vidíme, že mezi v a ω platí vztah $v = \omega r$, jak jsme odvodili již dříve.

Dostředivé zrychlení