Matrices

www.karelappeltans.be

21 juli 2024

Inhoudsopgave

1 Begripsvorming **3**
1.1 Begrip . . . 3
1.2 Speciale matrices . . . 3

2 Bewerkingen **4**
2.1 lineaire combinatie . . . 4
2.2 vermenigvuldiging . . . 4
2.3 machtsverheffing . . . 5
2.4 transponeren . . . 6
2.5 determinant . . . 6
2.5.1 berekeningen . . . 6
2.5.2 eigenschappen . . . 7
2.6 inverse . . . 7
2.6.1 Berekening . . . 7
2.6.2 uniciteit . . . 8
2.6.3 eigenschappen . . . 9
2.7 eigenwaarden en eigenvectoren . . . 9

3 Oefeningen **9**

4 Oplossen van stelsels **12**
4.1 Methode van Gauss-Jordan . . . 12
4.1.1 inleidend voorbeeld . . . 12
4.1.2 Elementaire rijoperaties & trapvormen . . . 12
4.1.3 Mogelijke oplossingen voor een stelsel . . . 13
4.1.4 rang van een matrix . . . 14
4.1.5 Oefeningen . . . 15
4.2 methode Cramer en methode inverse matrix voor stelsels met unieke oplossing . . . 16
4.2.1 methode Cramer . . . 16
4.2.2 inverse matrix . . . 16
4.2.3 oefeningen . . . 17

5 Vraagstukken matrices **17**

6 Stelsels met parameter **19**
6.1 begripsvorming . . . 19
6.2 Oefeningen . . . 19

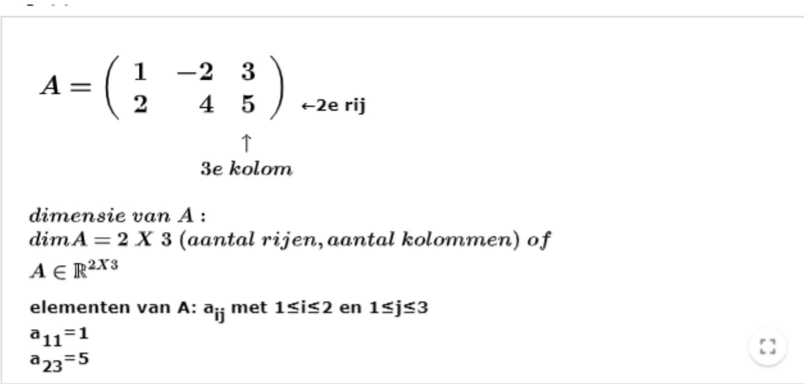
7 Toepassingen **21**
7.1 Markovketen . . . 21
7.1.1 Begripsvorming . . . 21
7.1.2 Oefeningen . . . 22
7.2 Lesleymatrices . . . 23
7.2.1 Begripsvorming . . . 23
7.2.2 Oefeningen . . . 23
7.3 Meetkundige toepassingen . . . 24

7.4 Input-Output modellen van Leontief 25
7.4.1 begripsvorming 25
7.4.2 oefeningen 25

8 Matrixbewerkingen m.b.v. geogebra **26**
8.1 Ingeven 26
8.2 bewerkingen 26

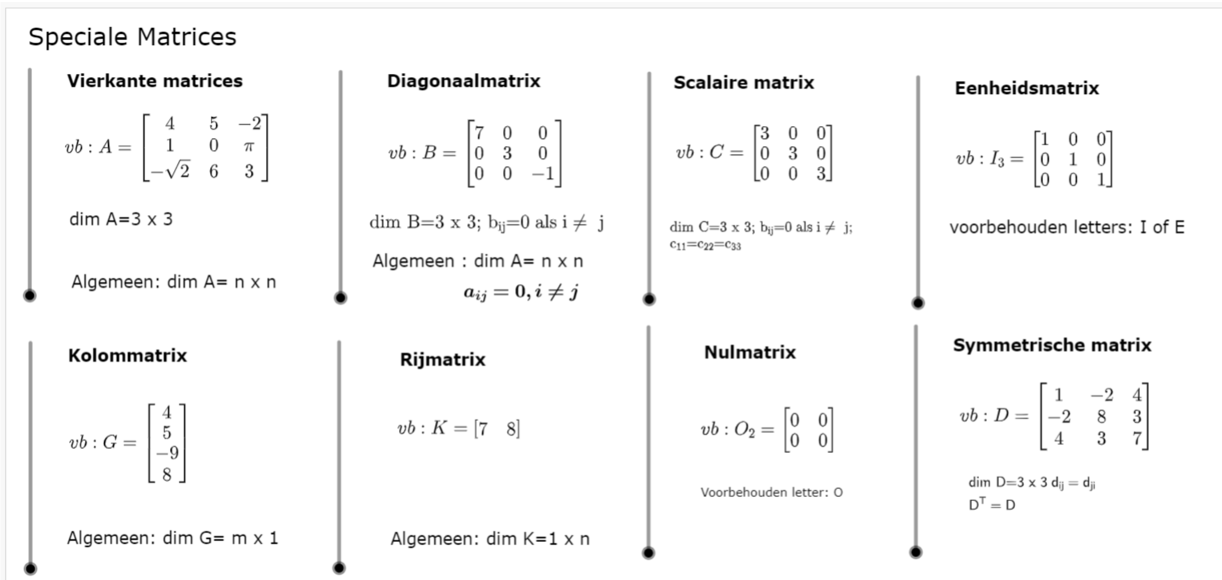
1 Begripsvorming

1.1 Begrip



Figuur 1: https://www.geogebra.org/m/wXBpq5Ay

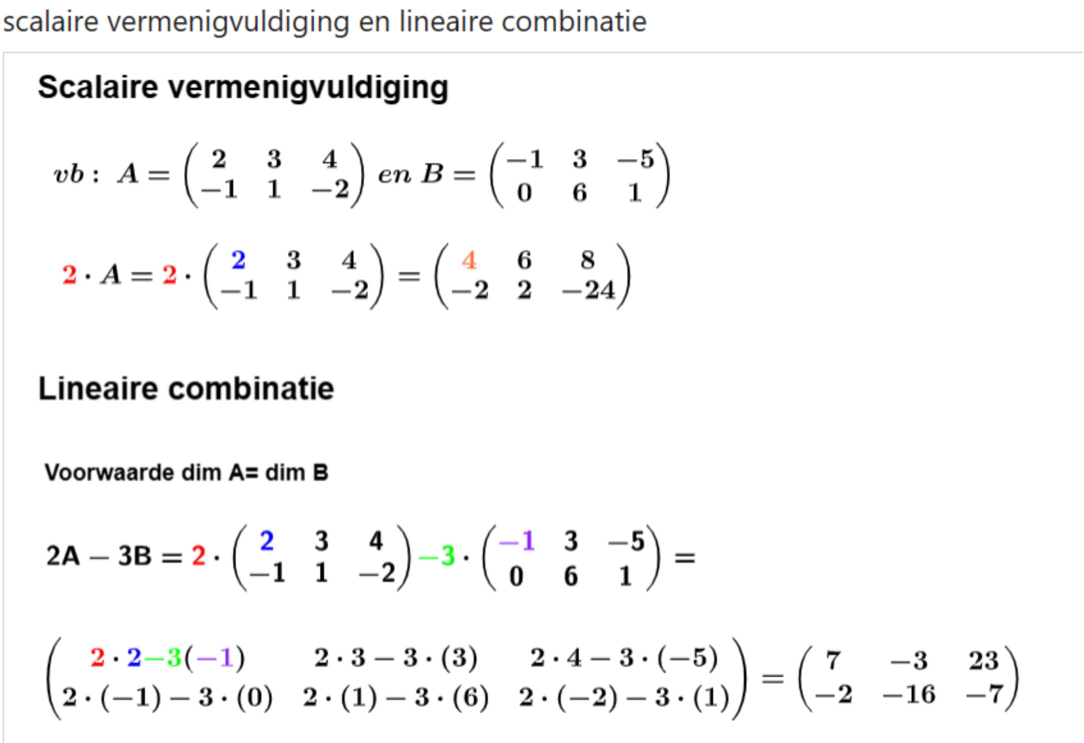
1.2 Speciale matrices



Figuur 2: https://www.geogebra.org/m/wXBpq5Ay

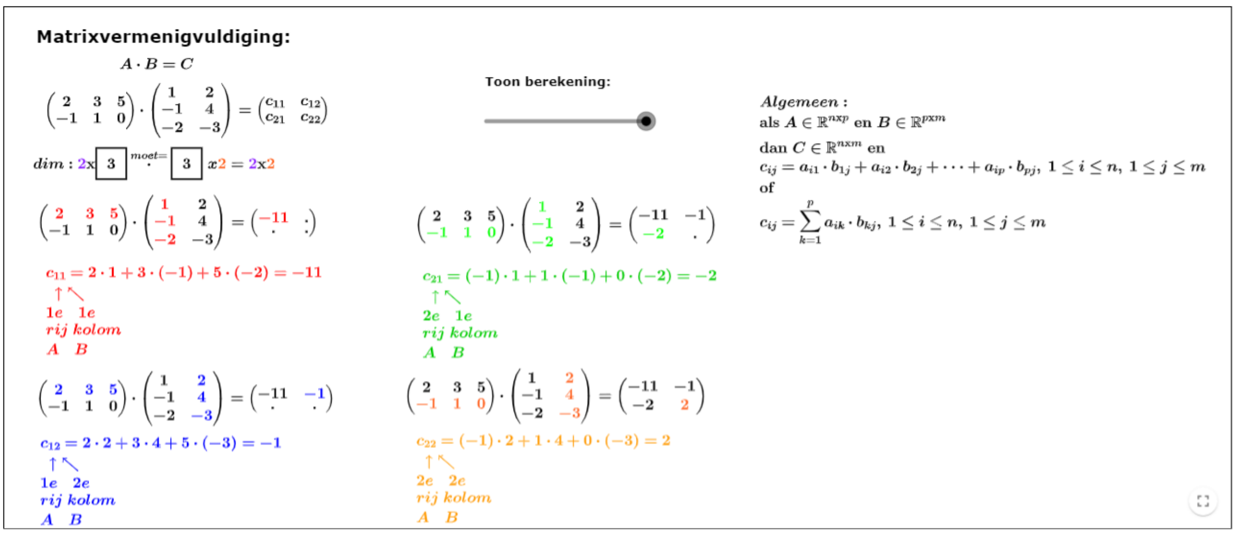
2 Bewerkingen

2.1 lineaire combinatie



Figuur 3: https://www.geogebra.org/m/wXBpq5Ay

2.2 vermenigvuldiging



Figuur 4: https://www.geogebra.org/m/wXBpq5Ay

Bij matrixvermenigvuldiging zijn er enkele 'eigenaardigheden'.

Nuldeler

☑ definitie

Een matrix A is een nuldeler als A $\neq$ O is en het vermenigvuldigd met zichzelf of met een andere matrix, stel B, met ook B $\neq$ O, als product O oplevert.

☑ voorbeeld

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$neem\ B = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{dan is} \quad A \cdot B = O$$

Niet commutatief!

☑ definitie commutativiteit wil zeggen dat AB=BA

☑ voorbeeld 1 dim A= 3 x 2 en dim B= 2 x 3, dim AB=3 x 3 en dim BA =2 x 2
Dus de dimensies van AB en BA zijn verschillend, dus

$$AB \neq BA$$

☑ voorbeeld 2 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $en\ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $dan\ AB \neq BA$

Figuur 5: https://www.geogebra.org/m/wXBpq5Ay

2.3 machtsverheffing

Voorwaarde: $A \in \mathbb{R}^{nxn}$: $A^2 = A \cdot A$; $A^n = A \cdot A \cdot A \cdots A$

Machtsverheffing:

Hiernaast kunnen de elementen van matrix A en B aangepast worden -->

Voorwaarde: A moet een vierkante matrix zijn

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -9 & 28 \end{pmatrix}$$

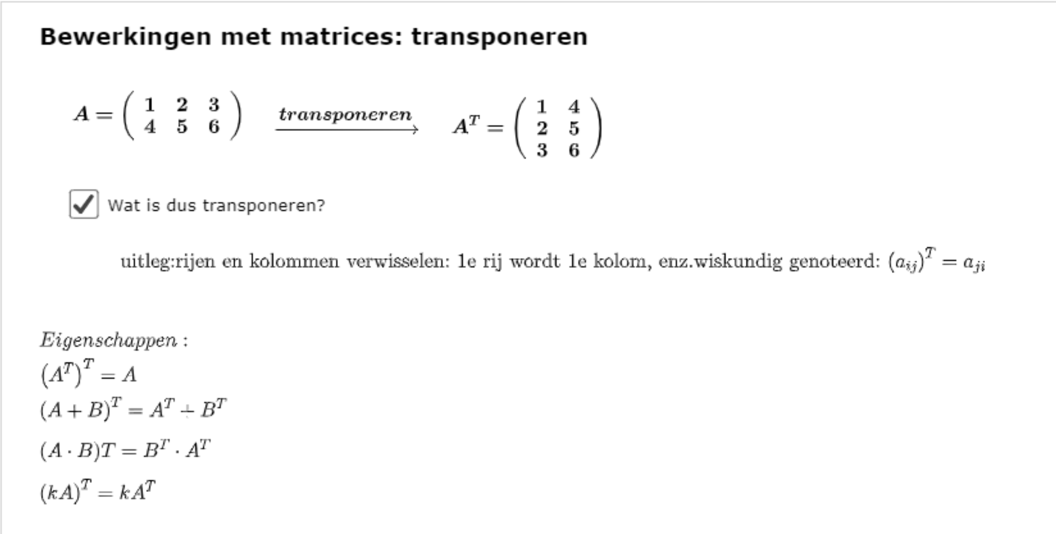
$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -9 & 28 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 22 \\ 66 & -149 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 4 & 16 \\ 3 & -6 & 17 \\ 2 & 12 & 24 \end{pmatrix}$$

	A	B	C
1	2	1	
2	3	-5	
3			
4	1	-2	3
5	4	0	1
6	-1	2	5
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			

Figuur 6: https://www.geogebra.org/m/wXBpq5Ay

2.4 transponeren

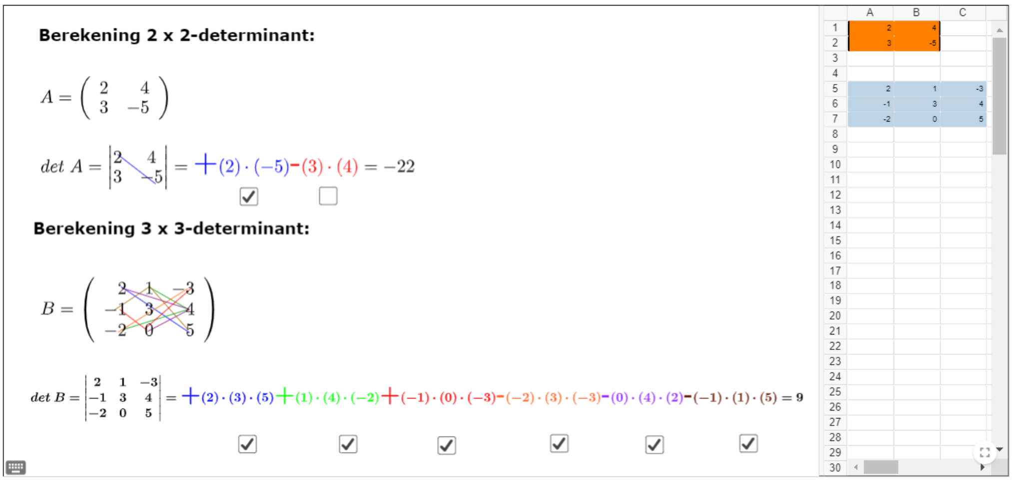


Figuur 7: https://www.geogebra.org/m/wXBpq5Ay

2.5 determinant

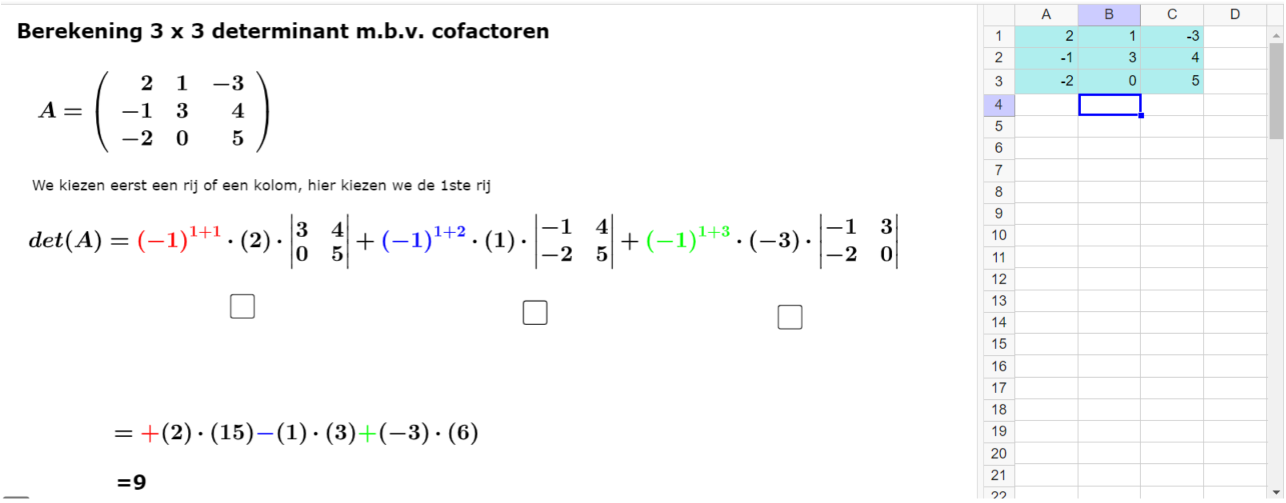
2.5.1 berekeningen

methode 1



Figuur 8: https://www.geogebra.org/m/Thk96QYz

methode 2



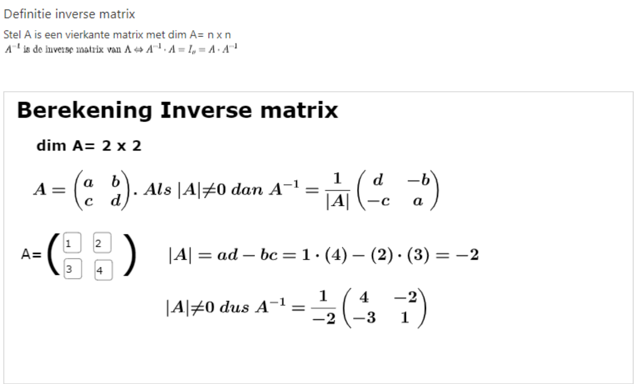
Figuur 9: https://www.geogebra.org/m/Thk96QYz

2.5.2 eigenschappen

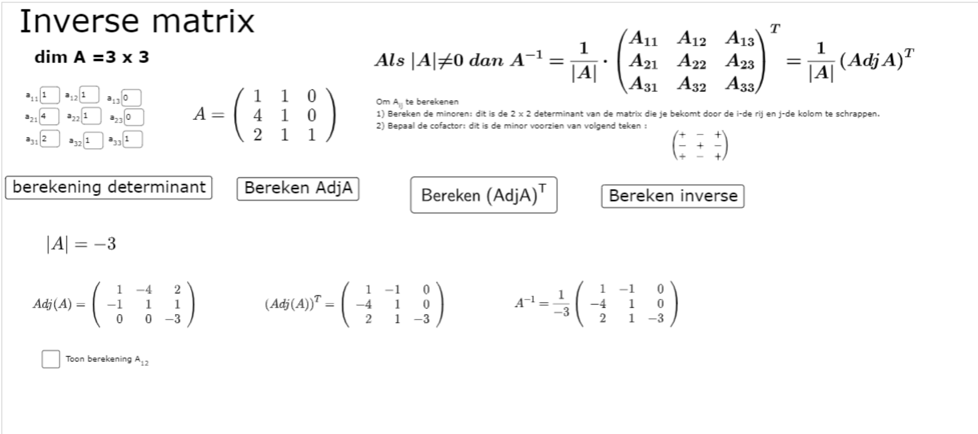
1. Bij twee gelijke rijen (kolommen): $det(A) = 0$
2. Een gemeenschappelijke factor in rij(kolom) mag afgezonderd worden
3. Een lineaire combinatie $R_i + k \cdot R_j$ of $K_i + k \cdot K_j$ verandert de waarde van een determinant niet

2.6 inverse

2.6.1 Berekening

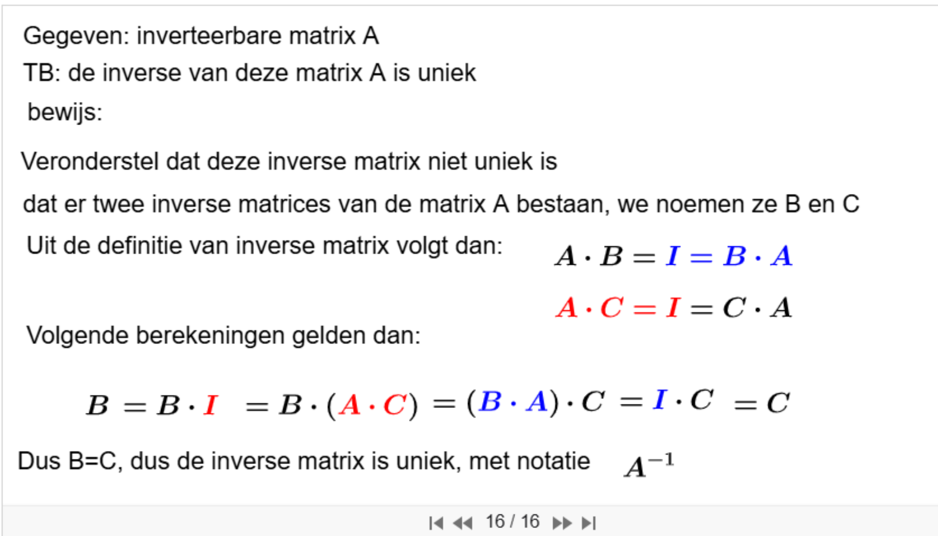


Figuur 10: https://www.geogebra.org/m/yfqw9ndn



Figuur 11: https://www.geogebra.org/m/yfqw9ndn

2.6.2 uniciteit



Figuur 12: https://www.geogebra.org/m/yfqw9ndn

2.6.3 eigenschappen

Eigenschappen inverse matrix

A en B zijn reguliere matrices met dimensie nxn:; k ∈ $\mathbb{R}_0$

$AA^{-1} = I = A^{-1}A$

$BB^{-1} = I = B^{-1}B$

'de inverse matrix van een geg matrix is de matrix die (rechts en links) vermenigvuldigt met de geg matrix de eenheidsmatrix geeft met als notatie: A^{-1}

1. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$ ☑ bewijs $\left(A^{-1}\right)^{-1}$**is de matrix die (links en rechts) vermenigvuldigt met A^{-1} I geeft, dat is dus A want geg $AA^{-1} = I = A^{-1}A$**

2. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ ☑ bewijs $(AB)^{-1}$ **is de matrix die (links en rechts) vermenigvuldigt met AB I geeft**

$$(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

$$AB(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

3. $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$ ☑ bewijs $(kA)^{-1}$**is de matrix die (links en rechts) vermenigdvuldigt met kA I geeft**

$$\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right)kA = (\frac{1}{k}k)A^{-1}A = 1I = I$$

$$kA\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right) = (k\frac{1}{k})AA^{-1} = 1I = I$$

4. $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$ ☑ bewijs $\left(A^T\right)^{-1}$**is de matrix die (links en rechts) vermenigvuldigt met A^T I geeft**

$$\left(A^{-1}\right)^T A^T = \left(AA^{-1}\right)^T = I^T = I$$

$$A^T\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^{-1}A\right)^T = I^T = I$$

Figuur 13: https://www.geogebra.org/m/yfqw9ndn

2.7 eigenwaarden en eigenvectoren

Eigenwaarden en eigenvectoren

$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \lambda = 2$ **en met bijbehorende kolommatrix(vector)** $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

worden een eigenwaarde en eigenvector van A genoemd omdat $\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

eigenwaarden zoeken via de karakteristieke vergelijking van A

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow (3-\lambda)(-\lambda) + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$\begin{matrix} s = 3 \\ p = 2 \end{matrix} \quad \lambda = 1 \ en \ \lambda = 2$$

eigenvectoren bepalen via methode van Gauss-Jordan $\left(\begin{array}{cc|c} 3-\lambda & -2 & 0 \\ 1 & 0-\lambda & 0 \end{array}\right)$

$$\lambda = 2 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) y = k \ en \ x = 2k \rightarrow \binom{x}{y} = k\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 1 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) y = k \ en \ x = k \rightarrow \binom{x}{y} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Figuur 14: https://www.geogebra.org/m/dkhddkgy

3 Oefeningen

1. Gegeven $F \in \mathbb{R}^{5x2}$ met $f_{ij} = -2i + j$. Bepaal F
2. Geef een voorbeeld van een symmetrische matrix van orde 3. Een symmetrische matrix A is een matrix waarvoor geldt $A^T = A$ of anders gezegd:$a_{ij} = a_{ji}$.
3. Bepaal de dimensie van matrix A, B en C als dim E=5 x 2 en

$$E = \left(A \cdot C^T - B^T\right)^T$$

4. Ga na dat de matrixvermeningvuldiging
   (a) associatief is, m.a.w. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
   (b) distributief is t.o.v. de optelling, m.a.w. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

5. Gegeven $\begin{bmatrix} p & 5-2p \\ 25-\frac{3p}{2} & 15 \end{bmatrix}$ en $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.
   Bepaal de waarde van p, q en n als $A + qB = nI$

6. Bepaal de waarde van m:
   $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3m & 8 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m & -6 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} m & -2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 3 & 22 \\ 87 & -38 \end{bmatrix}$

7. Beschouw de matrix $M = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -6 & -9 \end{bmatrix}$ en $A(a) = \begin{bmatrix} a+1 & a+2 \\ a-2 & a+1 \end{bmatrix}$
   (a) toon aan: $A(-a) + A(a) = 2A(0)$
   (b) Bepaal de waarde(n) van a en b als er geldt: $A(a) \cdot A(b) = M$

8. Toon aan dat $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$ een nuldeler is. (A. neem bijv $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$)

9. Beschouw de matrix $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$, met parameter $\alpha \in \mathbb{R}$. Voor welke α is $A^2 = -I$?

10. Toon aan dat A en B wel commuteren, m.a.w. $AB = BA$, $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ en $B = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$

11. Geldt in $\mathbb{R}^{nxn}$: $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$?

12. Gegeven $A \in \mathbb{R}^{nxn}$. TB: $A + A^T$ is symmetrisch

13. Gegeven $A \cdot B = A$ en $B \cdot A = B$. TB $A^2 = A$ en $B^2 = B$ (we zeggen dat A en B idempotent zijn)

14. Bepaal alle matrices B die commuteren met $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

15. Louis doet inkopen voor zijn verjaardagsfeest. Hij koopt drie soorten wijn: witte, rode en rosé. Van elk van die soorten koopt hij Franse en Australische wijnen. De prijzenmatrix P in euro en de aantallenmatrix A zijn: $P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathit{wit} & \mathit{rood} & \mathit{rose} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 7,50 & 8,00 & 8,70 \\ 4,20 & 5,00 & 5,70 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} Fr \\ Aus \end{array}$, $A = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} Fr & Aus \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \mathit{wit} \\ \mathit{rood} \\ \mathit{rose} \end{array}$ Gevraagd:
    (a) Bereken $P \cdot A$. Wat is de betekenis van de getallen op de hoofddiagonaal?
    (b) Bereken $A \cdot P$. Wat is de betekenis van de getallen op de hoofddiagonaal?
    (c) Is $P \cdot A = A \cdot P$? Welke eigenschap blijkt hier wel of niet te gelden?
    (d) Hebben de overige getallen in $P \cdot A$ en in $A \cdot P$ betekenis? Indien wel, geef die betekenis. Indien niet, waarom dan niet?
    (e) De som van de getallen op de hoofddiagonaal van $P \cdot A$ en van $A \cdot P$ is gelijk. Geef een verklaring

16. Robert en Betrand hebben elk een stappenteller gekregen. Ze houden nu dagelijks bij hoeveel stappen ze gezet hebben.De gegevens van de laatste volledige week zijn weergegeven in onderstaande matrix:

$$S = \begin{array}{r} \\ \mathit{Robert} \\ \mathit{Bertrand} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} ma & di & wo & do & vrij & za & zo \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3124 & 2322 & 1526 & 2589 & 2552 & 9811 & 7896 \\ 1244 & 1255 & 2325 & 1255 & 3256 & 8415 & 1898 \end{bmatrix} \end{array}$$

    (a) Stel een matrix V op zodat je uit $S \cdot V$ kan aflezen hoeveel stappen ze elk op vrijdag deden
    (b) Stel een matrix W op zodat je uit $S \cdot W$ kan aflezen wat het totaal aantal stappen per persoon tijdens de weekdagen was.

17. Bereken: $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \\ 3 & 9 & 7 \end{vmatrix}$

18. Toon aan dat $\begin{vmatrix} x-y & x-y & x^2-y^2 \\ 1 & 1 & x+y \\ -y & 1 & x \end{vmatrix} = 0$

19. Bepaal alle mogelijke waarden van x zodat: $\begin{vmatrix} 3x-8 & 3 & 8 \\ 3 & 3x-8 & 3 \\ 3 & 3 & 3x-8 \end{vmatrix} = 0$

20. Bepaal alle mogelijke waarden van x zodat: $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 20 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & 2x & 5x^2 \end{vmatrix} = 0$

21. Als A inverteerbaar is met $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & a & 1 \end{bmatrix}$. Bepaal dan de voorwaarde op a en bepaal vervolgens het element op rij 2 en kolom 1 van A^{-1}

22. Toon aan dat $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\cos\theta} & \tan\theta \\ \tan\theta & \frac{1}{\cos\theta} \end{bmatrix}$ regulier is.

23. Gegeven $A = \begin{bmatrix} 1 & \tan x \\ -\tan x & 1 \end{bmatrix}$. Toon aan dat $A^T \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos 2x & -\sin 2x \\ \sin 2x & \cos 2x \end{bmatrix}$

24. Bepaal a als $X + X^{-1} = I$ met $X = \begin{bmatrix} 2 & a \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

25. Bepaal A zodat $\left(A^T - 8I\right)^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$

26. Gegeven: $A = \begin{bmatrix} 0 & k \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Bepaal $k \in \mathbb{R}_0$ zodat $A^{-1} = A^3$

27. Als A en B reguliere matrices zijn bepaal dan X uit $A \cdot X \cdot B = C$

28. Zonder X af: $\left(AX^T + 2I^{-1}\right)^{-1} = A^2$

29. Juist of fout: Bij juist bewijs en bij fout geef tegenvoorbeeld
    (a) Uit $AB = AC$ volgt $B = C$?
    (b) Als A en B van orde 2 en singulier zijn, dan is A-B ook singulier
    (c) Als zowel A_1 en A_2 met B commuteren, dan commuteert $(A_1 \cdot A_2)$ met B ook.

30. Als $A^3 = I$ dan is A regulier

31. Als $A^2 - 2A + I$=0, dan bestaat A^{-1}. Toon aan en geef een uitdrukking van A^{-1}

32. Bewijs, gebruik hiervoor volgende eigenschap: $det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$
    (a) $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$.
    (b) de determinant van een idempotente matrix is 0 of 1
    (c) Als A een nuldeler is dan det(A)=0

33. Bereken de eigenwaarden en eigenvectoren van
    (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
    (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

34. Bewijs m.b.v. volledige inductie

(a) als $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ dan $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{bmatrix}$

(b) als $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ dan $A^n = 2^{n-1}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

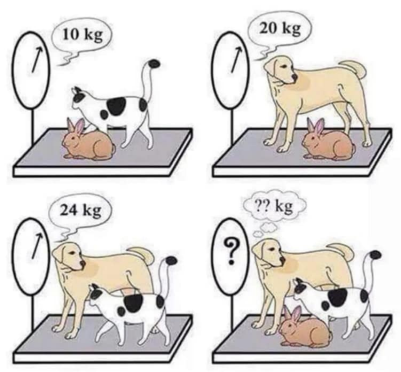
(c) als $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ dan $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(d) als $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ dan $A^n = \begin{bmatrix} 3^n & 3^n - 1 & -3^n + 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

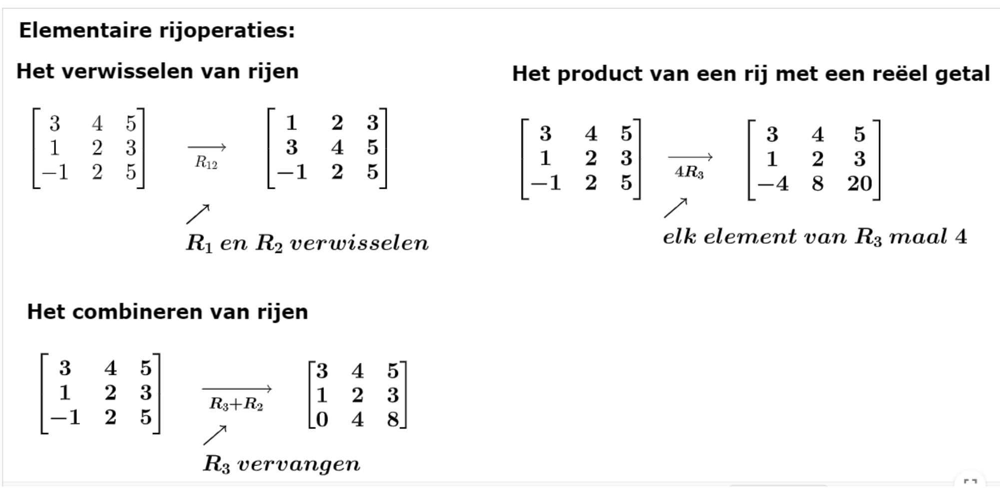
4 Oplossen van stelsels

4.1 Methode van Gauss-Jordan

4.1.1 inleidend voorbeeld



4.1.2 Elementaire rijoperaties & trapvormen



Figuur 15: https://www.geogebra.org/m/junM2djw

(Canonieke) trapvorm

Bedoeling is om met elementaire rijbewerkingen te komen tot een (canonieke) trapvorm

trapvorm:

$$T = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) eventuele nul-rijen bevinden zich onderaan,

(b) het eerste niet-nul element van een niet-nul rij staat links t.o.v. het eerste niet-nul element van de volgende rij

canonieke trapvorm

$$T_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

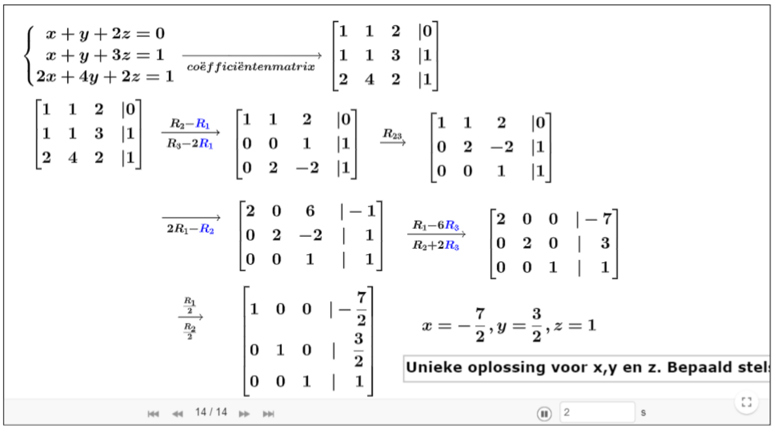
(a) T_c is een trapvorm,

(b) het eerste niet-nul element van een niet-nul rij is 1 en de overige elementen in de kolom horende bij deze 1 zijn 0

Figuur 16: https://www.geogebra.org/m/junM2djw

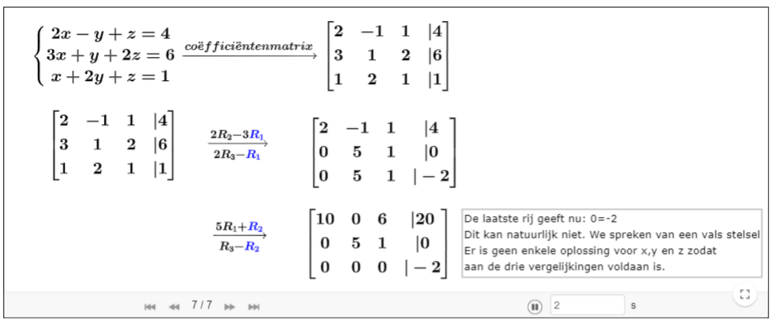
4.1.3 Mogelijke oplossingen voor een stelsel

unieke oplossing



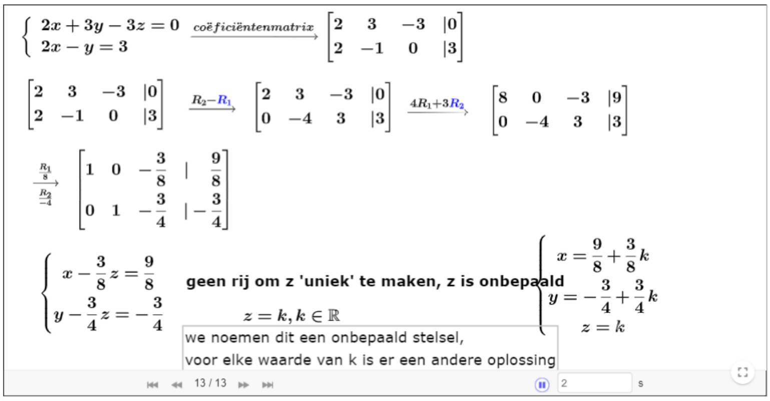
Figuur 17: https://www.geogebra.org/m/junM2djw

geen oplossing



Figuur 18: https://www.geogebra.org/m/junM2djw

oneindig veel oplossingen

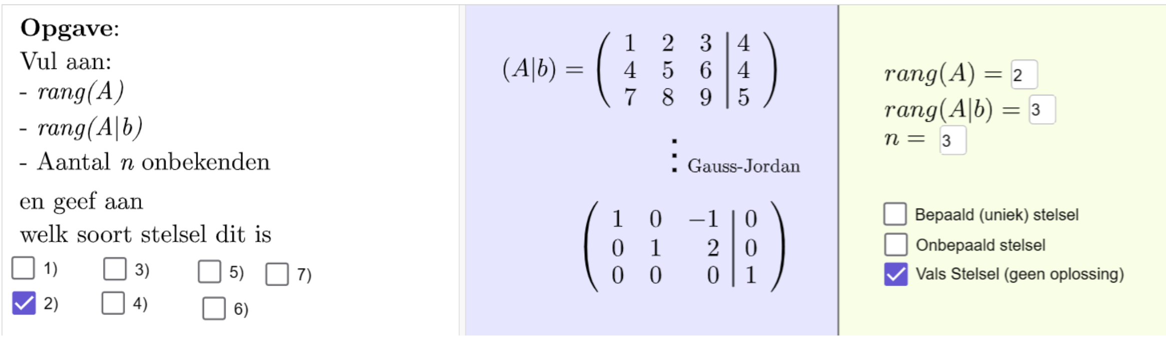


Figuur 19: https://www.geogebra.org/m/junM2djw

4.1.4 rang van een matrix

De rang van een matrix A, notatie r(A), wordt bepaald door het aantal niet-nul rijen dat we overhouden, nadat we de matrix herleid hebben tot de rij-canonieke vorm. Volgende regels gelden dan bij het oplossen van stelsels:

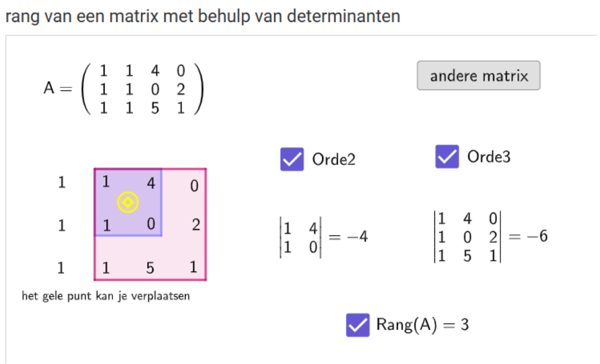
- $r(A) = r(A_b) : \#onbekenden$: unieke oplossing
- $r(A) < r(A_b)$: Vals stelsel
- $r(A) = r(A_b) < \#onbekenden$: onbepaald stelsel



Figuur 20: https://www.geogebra.org/m/junM2djw

rang van een matrix bepalen m.b.v. determinanten

De rang van een mxn-matrix A is gelijk aan r als en slechts als er tenminste één van nul verschillende minor van de r-de orde bestaat, terwijl alle minoren van de (r+1)-de orde gelijk zijn aan nul.



Figuur 21: https://www.geogebra.org/m/Thk96QYz

4.1.5 Oefeningen

1. Los op volgens de methode van Gauss-Jordan

   (a) $\begin{cases} 3x & -2y & = & 12 \\ 7x & +2y & = & 8 \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} x & +4y & -12z & = & 8 \\ 2x & -y & +3z & = & 6 \\ x & -14y & +42z & = & 10 \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$

   (d) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 6x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

2. Bepaal de waarde(n) b zodat onderstaand stelsel oplosbaar is

$$\begin{cases} x & +3y & +3z & = & 5 \\ 3x & +3y & +2z & = & 1 \\ 4x & & -2z & = & b \end{cases}$$

3. Bepaal de waarde(n) van a en b zodat $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & -3 \\ 0 & 0 & a & | & b \end{bmatrix}$

   (a) er geen oplossing is

   (b) juist één oplossing is

   (c) oneindig veel oplossingen zijn

4. De rijcanonieke vorm van een stelsel is:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{bmatrix}$$

   Bepaal de oplossingsverzameling.

5. Een stelsel met twee vergelijkingen en drie onbekenden heeft steeds een unieke oplossing. Is dit een juiste bewering? Verklaar jullie antwoord.

6. Een nulrij in de uitgebreide matrix geeft altijd een onbepaald stelsel. Is dit een juiste bewering? Verklaar jullie antwoord.

7. Een homogeen stelsel is steeds oplosbaar. Is dit een juiste bewering? Verklaar jullie antwoord.

8. Bepaal de inverse matrix m.b.v. methode van Gauss-Jordan

   (a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 5 \end{bmatrix}$

9. Het begrip rang van een matrix. Bespreek de oplosbaarheid van een stelsel in functie van de rang van een matrix

10. Ga m.b.v. determinanten na dat volgende matrix rang 2 heeft $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

4.2 methode Cramer en methode inverse matrix voor stelsels met unieke oplossing

4.2.1 methode Cramer

Methode van Cramer:

$$\begin{cases} \boxed{-1}\,x + \boxed{1}\,y = \boxed{-2} \\ \boxed{2}\,x + \boxed{3}\,y = \boxed{6} \end{cases}$$

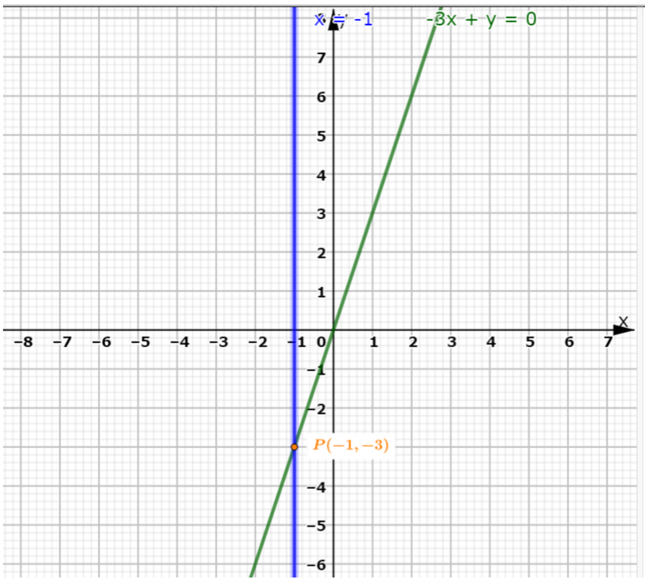
$$\begin{cases} -1x + 1y = -2 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -5 \qquad |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Methode van Cramer kan toegepast worden}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-12}{-5} = \frac{12}{5} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-2}{-5} = \frac{2}{5}$$

Figuur 22: https://www.geogebra.org/m/qcgdebvh

4.2.2 inverse matrix



$ax + by = c$ a = -3, b = 1, e = 0

$cx + dy = f$ c = -3, d = 0, f = 3

$-3x + y = 0$ $\qquad x = -1$

$$\begin{cases} -3x + 1y = 0 \\ -3x + 0y = 3 \end{cases} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}}_{B}$$

$$Als\ |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0\ dan\ A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \qquad |A| = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -3 \cdot (0) - (-3) \cdot (0) = 3$$

en dan

$$\begin{aligned} AX &= B \\ A^{-1}AX &= A^{-1}B & \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \\ IX &= A^{-1}B & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 \\ -9 \end{pmatrix} \\ X &= A^{-1}B & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Unieke oplossing : $x = -1$, $y = -3$. Hier coördinaten snijpunt

Figuur 23: https://www.geogebra.org/m/yfqw9ndn

4.2.3 oefeningen

1. Los volgend stelsel op met de methode van Cramer en enkel voor de onbekende y

$$\begin{cases} x-2y+z=1 \\ 2x+y-z=-1 \\ -x-y+z=2 \end{cases}$$

   (A. y=3)

2. Los onderstaand stelsel op

$$\begin{cases} 3x+4y=5 \\ -x+5y=7 \end{cases}$$

   (a) met de methode van Cramer

   (b) met de behulp van de inverse matrix

3. Gegeven is volgend stelsel met parameters h en k:

$$\begin{cases} x-y-2z=1 \\ x-2y+hz=k \\ 4x+hy-7z=7 \end{cases}$$

   (a) Neem aan dat dit stelsel een unieke oplossing heeft

      i. Bewijs dan dat $h \neq -3$

      ii. Geef dan de oplossingen van dit stelsel

   (b) Neem aan dat dit stelsel oplossingen heeft

      i. Bewijs dan dat $k=-2$

      ii. Geef dan de oplossingen van dit stelsel

4. Gegeven: $\begin{cases} ax & -y & = & 3 \\ -4x & +ay & = & 2 \end{cases}$

   (a) Bepaal de waarde(n) van a zodat dit stelsel een unieke oplossing heeft.

   (b) Bepaal m.b.v. de methode van Cramer de oplossing voor x onder deze voorwaarde(n).

5 Vraagstukken matrices

1. Drie studenten kopen samen een fiets voor 100 euro. De eerste zegt tegen de tweede 'ik zal hem betalen als jij me de helft van je geld geeft' Daarop zegt de tweede tegen de derde' Als jij me één derde van je geld geeft, betaal ik hem wel'. Waarop de derde tegen de eerste: 'je zou me beter één vierde van je geld geven, dan betaal ik die fiets wel'. Hoeveel geld heeft elk?

2. Zoek een getal van 3 cijfers, waarvan het volgende gegeven is.

   (a) De som van de cijfers is 17

   (b) Het cijfer van de tientallen is het drievoud van het cijfer van de honderdtallen

   (c) Keren we het getal om, dan verkrijgen we een getal dat 693 eenheden groter is dan het oorspronkelijke getal

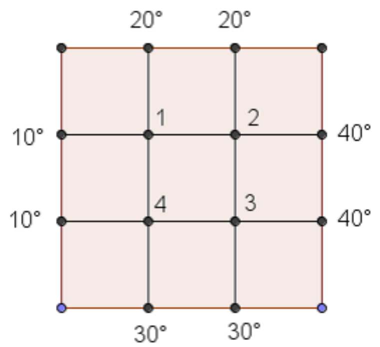
3. Ans, Bart en Cindy spelen een spel. Na elke ronde moet de verliezer de twee andere spelers evenveel geld geven, als ze op dat moment hebben. De eerste ronde verliest Ans, de tweede ronde Bart en de derde ronde Cindy. Na drie ronden hebben ze elk 24 euro. Wat was het beginbedrag van elke speler?

4. Een bouwfirma heeft volgende modules om een verdieping van een appartementsblok te zetten.
   module A: 3 flats met 3 slaapkamers, 6 flats met 2 slaapkamers en 9 flats met 1 slaapkamer
   module B: 4 flats met 3 slaapkamers, 5 flats met 2 slaapkamers en 7 flats met 1 slaapkamer
   module C: 2 flats met 3 slaapkamers, 7 flats met 2 slaapkamers en 11 flats met 1 slaapkamer
   Ik wil een building neerzetten met 36 flats met 3 slaapkamers, 81 flats met 2 slaapkamers en 123 flats met 1 slaapkamer.
   Hoeveel modules A, B en C nodig?

5. Toen Kasper in het ziekenhuis lag, kreeg hij van Xander een grote fruitmand gevuld met appelen, peren en sinaasappelen. Toen kwam moeder en nam een vierde van de appelen, een derde van de peren en de helft van de sinaasappelen. Er bleven 24 vruchten in de fruitmand over. Dan kwam Laura en nam een derde van de appelen, helft van de peren en een vierde van de sinaasappelen. Er bleven 15 stukken nog over. En ten slotte kwam broer Jonas en nam 1 peer en 2 sinaasappelen. Toen die dan vertrok bleven evenveel appelen als sinaasappelen als peren over. Hoe zag de oorspronkelijke fruitmand eruit? (A. 8 appels, 15 peren en 16 sinaasappels)

6. Een verhuurfirma van bestelwagens wil zijn wagenpark uitbreiden door 25 wagens aan te kopen met een totale laadruimte van 2800 m^3.Er zijn drie modellen beschikbaar: 10-foot bestelwagens met een capaciteit van 35 m^3; 14-foot bestelwagens met een capaciteit van 70 m^3 en 24-foot bestelwagens met een capaciteit van 140 m^3. Hoeveel stuks van elk moet de firma aankopen om de totale laadruimte te bekomen?

7. Bij de studie van warmtetransport wenst men de temperatuurverdeling bij evenwicht te kennen van een dunne plaat, wanneer de temperatuur op de rand van de plaat gekend is.



We zoeken T1, T2, T3 en T4, de temperaturen in de 4 inwendige knopen. We weten dat de temperatuur in een knooppunt bij benadering gelijk is aan het gemiddelde van de temperaturen in de nabijgelegen knooppunten. Zo is voor de figuur hierboven bijvoorbeeld $T_1 = \frac{10+20+T_2+T_4}{4}$.

8. Anna, Brigitte en Charlotte vormen een driegeslacht. Samen zijn ze 105 jaar oud. Anna is negen jaar ouder dan B en C samen. A en C samen komen nog 3 jaar tekort om dubbel zo oud te zijn als B. Hoe oud zijn deze dames?

9. Een bioloog heeft voor een experiment met muizen een voedselmengeling nodig, dat buiten andere stoffen, moet bestaan uit $23g$ protëine, $6,2g$ vet en $16g$ vocht. Hij beschikt over mengsels met de volgende samenstelling:

	protëine(%)	vet (%)	vocht(%)
Mengsel 1	20	2	15
Mengsel 2	10	6	10
Mengsel 3	15	5	5

Welke hoeveelheid van mengsel 1 moet de bioloog gebruiken om, in combinatie met gepaste hoeveelheden van de mengsels 2 en 3, het gevraagde voedselmengsel te bekomen ?

10. Bewijs de formule voor de inverse van een reguliere 2×2-matrix

11. Hartosh, Mark en Keiko werken bij een schildersbedrijf. Hartosh schildert eens zo snel als Mark. Hartosh en Keiko schilderen 6 kamers in 8 uur. Samen schilderen ze 14 kamers in 16 uur. Hoeveel kamers kunnen ze elk per uur schilderen? (ant: 1/4,1/2,1/2)

12. Uno, Duo en Tres zijn drie vrienden. Zij hebben allemaal geld geleend van malafide makelaar. Samen hebbben zij 600 euro geleend. Duo heeft 200 euro meer geleend dan Uno, Uno en Duo hebben samen even veel geleend als Tres. Hoeveel hebbben zij elk geleend?(50,250,300)

13. Balanceer de volgende chemische reacties:

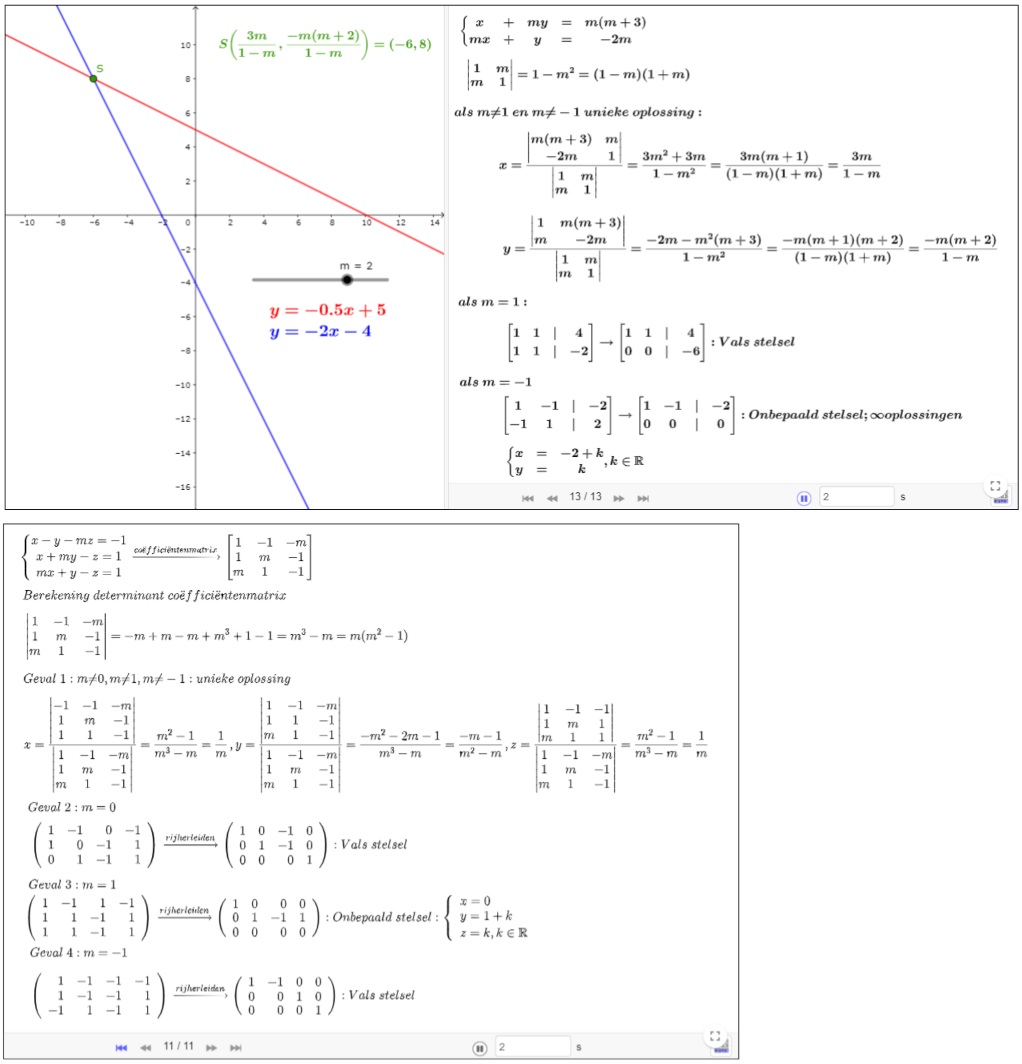
    (a) $Al_2O_3 + C \rightarrow Al + CO_2$

    (b) $H_3O + CaCO_3 \rightarrow H_2O + Ca + CO_2$

    (c) $B_2S_3 + H_2O \rightarrow H_3BO_3 + H_2S$

6 Stelsels met parameter

6.1 begripsvorming



Figuur 24: https://www.geogebra.org/m/g7TcQBkv

6.2 Oefeningen

1. Bespreek volgende stelsels in functie van de parameter m:

   (a) $\begin{cases} x & +m^2y & +z & = & m \\ mx & +y & +(m-2)z & = & m \\ x & +y & +z & = & 1 \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} x & +(m+1)y & +z & = & 0 \\ x & +y & +(m+1)z & = & 0 \\ 2x & +y & +z & = & m+1 \end{cases}$

2. Bepaal de voorwaarde op a,b en c zodat volgend stelsel steeds oplosbaar is:

$$\begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ 4x + y = 9 \\ ax + by = c \end{cases}$$

3. taak: stelsels met parameter Bespreek volgende stelsels in functie van de parameter m of a

(a) $\begin{cases} m^2x & -my & +z & = & -1 \\ x & -my & +mz & = & -m \\ mx & -my & +z & = & -1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x & -2y & +az & = & 1 \\ x & -2ay & +z & = & -2 \\ ax & -2y & +z & = & 1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x & +7y & +mz & = & 1 \\ 2x & +15y & +z & = & 3 \\ x & +7y & +m^2z & = & m \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 3x & +1y & +2z & = & 4 \\ mx & +2y & -z & = & 5 \\ 3x & +(m-5)y & +7z & = & 7 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 1x & +2y & +mz & = & 0 \\ & +y+3z & = & 0 & \\ 2x & +m^2y & -7z & = & 1-m^2 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} mx & +y & +z & = & m^2 \\ x & +my & +z & = & 3m \\ x & +y & +mz & = & 2 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} mx & +(m+1)y & +z & = & 0 \\ mx & +y & +(m+1)z & = & 0 \\ 2mx & +y & +z & = & m+1 \end{cases}$

(h) $\begin{cases} mx & +y & +z & = & 1 \\ x & +my & +z & = & m \\ x & +y & +mz & = & m^2 \end{cases}$

(i) $\begin{cases} x & +ay & +z & = & a^2 \\ ax & +2ay & +2z & = & 2a^2 \\ x & +ay & +az & = & 1 \end{cases}$

(j) $\begin{cases} x & -y & -mz & = & -1 \\ x & +my & -z & = & 1 \\ mx & +y & -z & = & 1 \end{cases}$

(k) $\begin{cases} ax & +2y & +z & = & 1 \\ x & +y & +z & = & 0 \\ x & +y & +2z & = & a \end{cases}$

(l) $\begin{cases} 2x & +3y & +z & = & 4 \\ -x & +ay & +2z & = & 5 \\ 7x & +3y & +(a-5)z & = & 7 \end{cases}$

(m) $\begin{cases} mx & -my & +m^2z & = & m \\ x & +y & -z & = & m \\ (m-1)x & +(m^2-1)y & -(m-1)z & = & m^2-1 \end{cases}$

(n) $\begin{cases} ax & +ay & -az & = & a \\ a^2x & -2a^2y & -az & = & a^2 \\ x & -ay & -a^2z & = & 1 \end{cases}$

(o) $\begin{cases} (k+4)x & +(k+4)y & +(k+4)z & = & 1 \\ x & +(k+2)y & +z & = & 1 \\ x & +y & +(k+2)z & = & 1 \end{cases}$

(p) $\begin{cases} x & +1y & +(m^2-1)z & = & -m \\ mx & +1y & +2(m-1)z & = & -m \\ (1+m)x & -my & +(m+1)z & = & m^2+3m+3 \end{cases}$

(q) $\begin{cases} -mx & +(m^2+m)y & +z & = & m^2+m \\ 1x & +(-m+1)y & -mz & = & -1 \\ -mx & +(m^2+1)y & +z & = & -m-1 \end{cases}$

(r) $\begin{cases} x & +y & +z & = & 1 \\ x & -y & +z & = & -1 \\ m^2x & +my & +z & = & m^3 \end{cases}$

(s) $\begin{cases} (m+2)x & +3y & -3z & = & 0 \\ x & +(m+1)y & -z & = & 1 \\ 2x & +3y & +(m-3)z & = & 0 \end{cases}$

(t) $\begin{cases} x & +ay & +z & = & 2a \\ ax & +y & +z & = & 0 \\ x & +ay & +(a+1)z & = & a \end{cases}$

(u) $\begin{cases} ax & +3y & +3z & = & a \\ x & & +az & = & a \\ 2x & +ay & & = & 0 \end{cases}$

(v) $\begin{cases} ax & +y & +z & = & a^2 \\ 2ax & +ay & +2z & = & 2a^2 \\ ax & +y & +az & = & 1 \end{cases}$

(w) $\begin{cases} (3-a)x & +y & -z & = & 0 \\ 2x & +(2-a)y & -2z & = & 0 \\ x & -y & +(1-a)z & = & 0 \end{cases}$

(x) $\begin{cases} (m+2)x & +2y & +4z & = & 3m \\ -mx & +5y & +2mz & = & -2m \\ 2x & +7y & +6z & = & 1 \end{cases}$

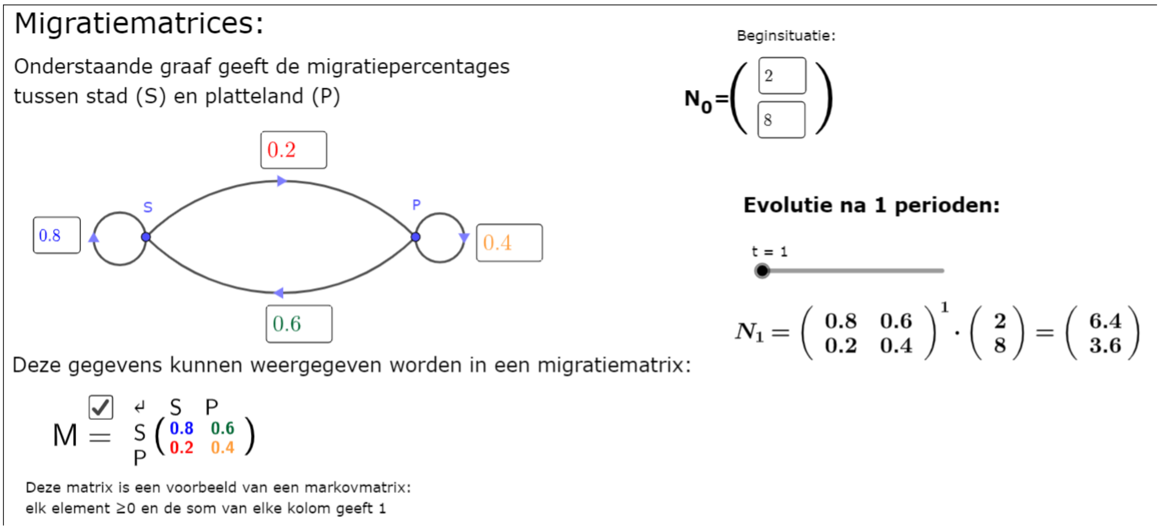
(y) $\begin{cases} x & +my & +z & = & 1 \\ mx & +y & +(m-1)z & = & m \\ x & +y & +z & = & m+1 \end{cases}$

(z) $\begin{cases} mx & +y & -z & = & 0 \\ 2x & +my & +z & = & 1 \\ & +y & +z & = & 2 \end{cases}$

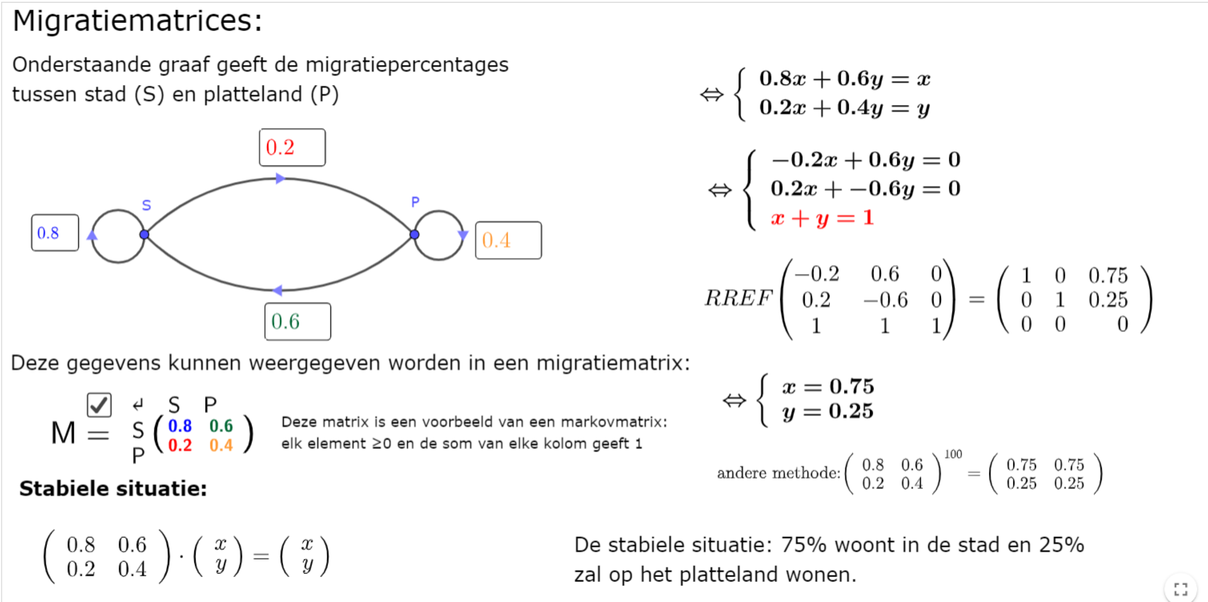
7 Toepassingen

7.1 Markovketen

7.1.1 Begripsvorming



Figuur 25: https://www.geogebra.org/m/h7g2xd8b



Figuur 26: https://www.geogebra.org/m/h7g2xd8b

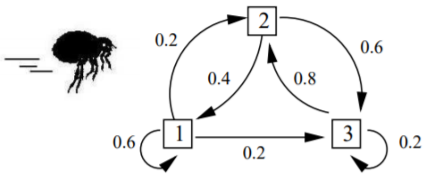
7.1.2 Oefeningen

1. Op een afgelegen eiland waarop 1000 mensen wonen is een eigenaardige ziekte uitgebroken. Op een gegeven moment zijn er 900 personen gezond en 100 ziek. In een tijdsbestek van een week wordt 20% van de gezonde mensen ziek en de overige blijven gezond. Van de zieke mensen geneest in die week 30%, de rest blijft ziek.

   (a) Bepaal het aantal zieke en gezonde mensen op dit eiland na één maand.

   (b) Hoe evolueert deze aantallen op lange termijn? Leg uit waarom er een stabiele situatie is.

2. Een wiskundevlieg verplaatst zich elk uur op de hoekpunten van een driehoek volgens volgende graaf



   (a) Bepaal de overgangsmatrix

   (b) Om 12u00 bevindt de vlieg zich in hoekpunt 1. Bereken de kans dat zij zich om 15u00 opnieuw in hoekpunt 1 bevindt.

   (c) Bepaal de stabiele situatie.

3. An, Liam en David zijn met de bal aan het trainen. Liam shot zijn ballen altijd evenredig naar de twee anderen. An shot haar bal 3 keer meer naar Liam dan naar David. David shot zijn bal slechts in één op tien naar Liam.

   (a) Bepaal de markovmatrix

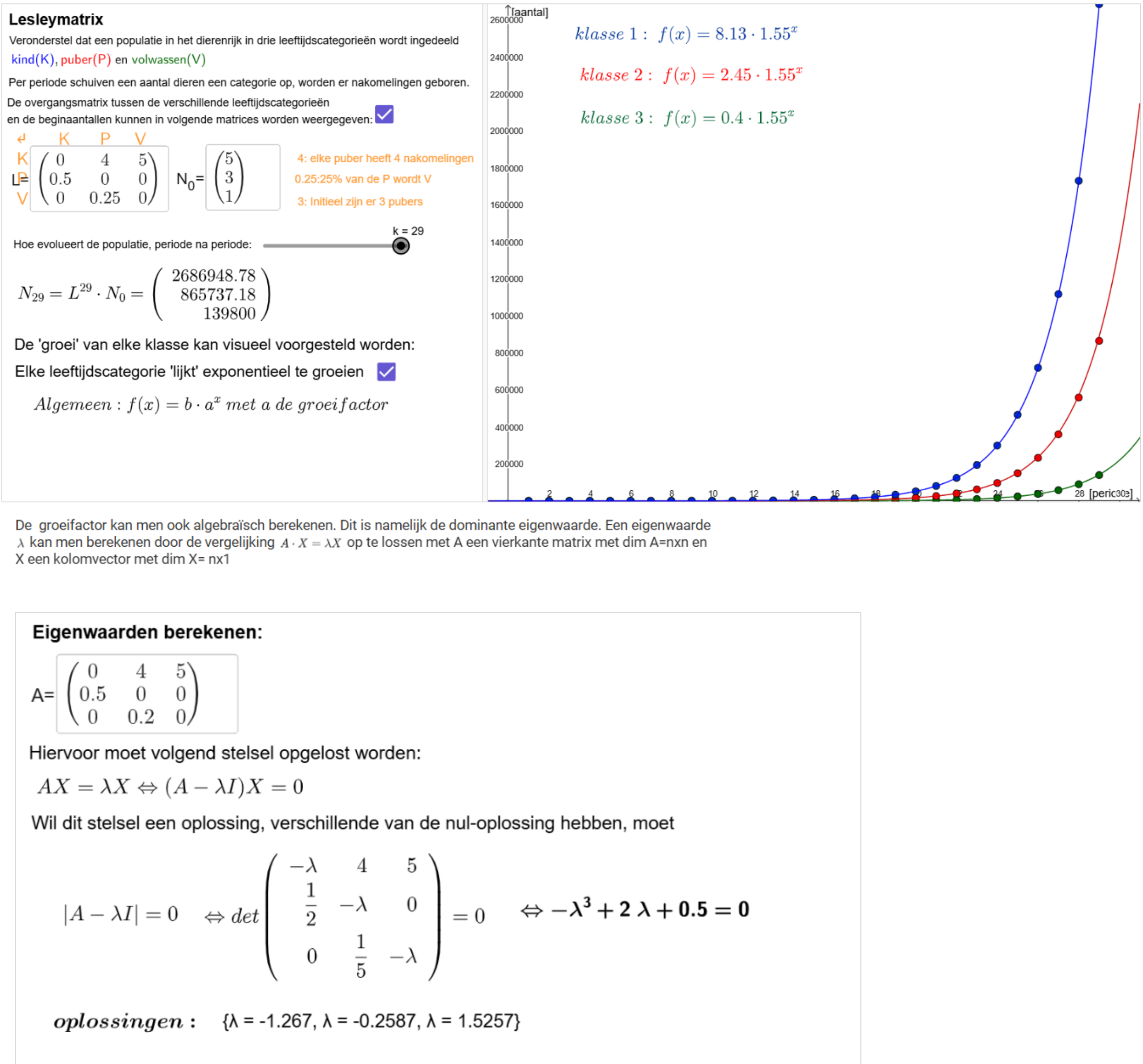
   (b) Als Liam begint met te passen, wat is dan de kans dat An de bal heeft na de derde pas?

   (c) Bepaal, als deze bestaat, de evenwichtsverdeling

4. Page Rank algoritme van Google

7.2 Lesleymatrices

7.2.1 Begripsvorming



Figuur 27: https://www.geogebra.org/m/jcS4NRh8

7.2.2 Oefeningen

1. Een bepaalde diersoort wordt in drie leeftijdsgroepen van 4 jaren verdeeld. Op zeker tijdstip ($t = 0$) is de opbouw van een popullatie van deze dieren: 200 jonge dieren, 100 volwassen dieren en 50 oude dieren. Er worden geen dieren ouder dan 12 jaar. Onderstaande graaf beschrijft het verloop tussen de leeftijdscategorieën van deze diersoort:

   (a) Stel de lesleymatrix op

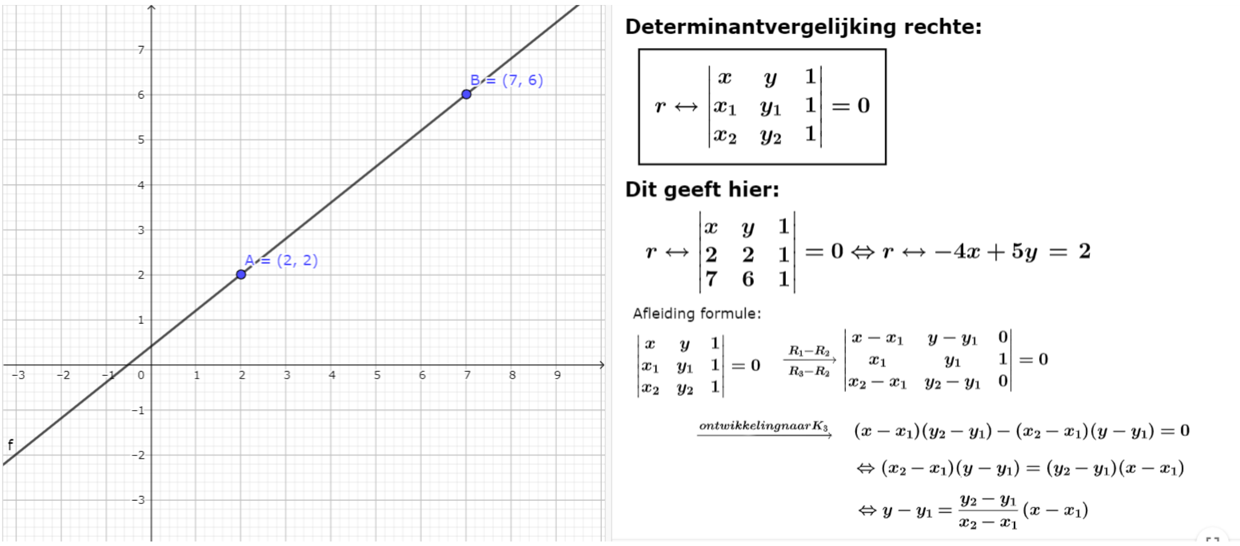
(b) Bereken de aantallen dieren per leeftijdsgroep over 4 jaar ($t = 1$)

(c) Bepaal de groeifactor van deze diersoort

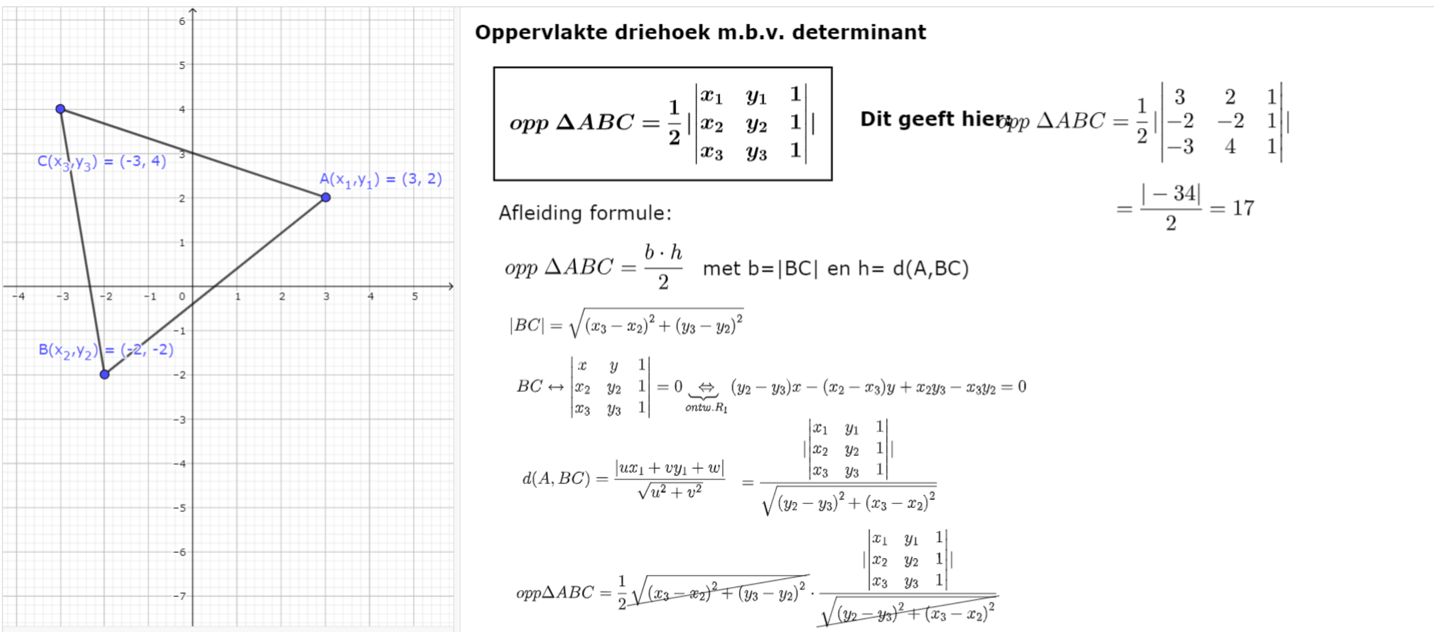
(d) Door vervuiling van hun natuurlijk milieu worden de overlevingskansen kleiner. Stel dat alle overlevingskansen met dezelfde factor k worden vermenigvuldigd. Bereken bij welke waarde k de populatie nog net niet zal gaan uitstervan.

2. Een keversoort kan bepaald worden door het aantal eitjes, larven en volwassen kevers. 95% van de eitjes sterven af, 75% van de larven worden een volwassen kever en per volwassen kever zijn er 100 eitjes. Als er 400 eitjes, 200 larven en 50 kevers zijn, hoe ontwikkelt zich deze soort op lange termijn?

7.3 Meetkundige toepassingen



Figuur 28: https://www.geogebra.org/m/vfenrnkv



Figuur 29: https://www.geogebra.org/m/vfenrnkv

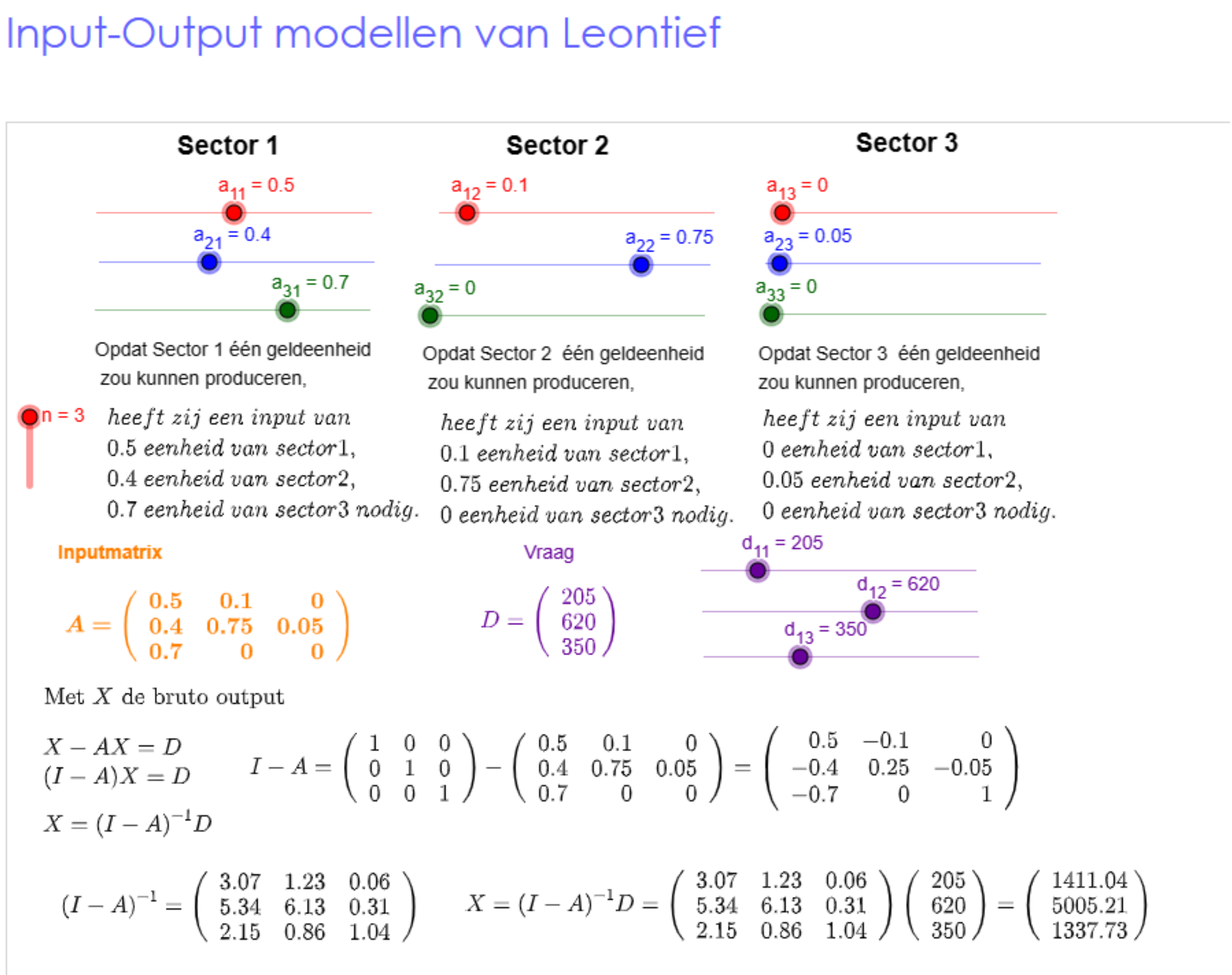
1. Bepaal voor welke waarde(n) van k de volgende rechten concurrent zijn. Bepaal in beide gevallen ook de coördinaten van het snijpunt

$$\begin{aligned} a &\leftrightarrow 3x - 4y + 2 = 0 \\ b &\leftrightarrow 2x + ky - 5 = 0 \\ c &\leftrightarrow x + y - 8k = 0 \end{aligned}$$

2. Bepaal de vergelijking van de rechten door de punten $A(1,3)$ en $B(-2,3)$

7.4 Input-Output modellen van Leontief

7.4.1 begripsvorming



Figuur 30: https://www.geogebra.org/m/xes8c7NN

7.4.2 oefeningen

1. Gegeven is de inputmatrix en de consumptie(vraag)matrix:

$$A = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.25 & 0.34 \\ 0.33 & 0.10 & 0.12 \\ 0.19 & 0.38 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1800 \\ 200 \\ 900 \end{bmatrix}$$

   (a) Leg de betekenis van de getallen $a_{21} = 0.33$ en $c_{21} = 200$

   (b) Maak de som van de elementen in de derde kolom van A. Leg de betekenis uit van dit getal.

   (c) Los dit input-output systeem op voor de gegeven consumptievector C

2. Veronderstel dat de economie van een regio slechts bestaat uit een staal- en een houtindustrie. Het kost 0.1 eenheden staal en 0.5 eenheden hout om één eenheid staal te produceren; het kost 0.2 eenheden staal en 0.0 eenheden hout om één eenheid hout te produceren. Voor volgende maand is er een export van 16 eenheden staal en 8 eenheden hout voorzien. Hoeveel eenheden van elk moeten er dan geproduceerd worden?

8 Matrixbewerkingen m.b.v. geogebra

8.1 Ingeven

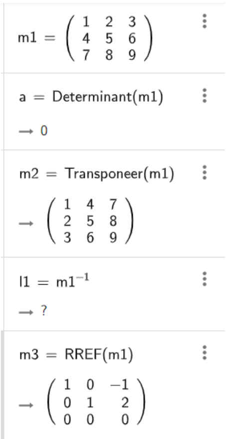
Dit moet via de accolades gebeuren. Er is een {} nodig voor de matrix en voor elke rij een {} nodig. Zowel de getallen als de rijen moeten door , gescheiden worden.

Gegebra geeft vervolgens automatisch een naam aan deze matrix, hier m1.

8.2 bewerkingen

Bewerkingen die je kan ingeven zijn:

1. transponeer(m1)
2. determinant(m1)
3. $m1^{-1}$
4. rref(m1)



Ook hier zal geogebra automatisch een naam toekennen.