República Dominicana
Instituto Superior de Formación Docente Salomé Ureña
Recinto Luis Napoleón Núñez Molina
Maestría en Matemática Superior con Orientación a la Enseñanza del Nivel Secundario

Título de la actividad:

Tarea 1: Aspectos preliminares

Asignatura: Geometría

Clave: MMS-553

Sección: 01

Docente: Jorge Blanco

Estudiante:

Denny Enmanuel Rivera Salvador

Matrícula:

20221-0397

Lugar y Fecha:

Santiago, Licey al Medio, 23/06/2023

1. Encontrar:

a) la proyección de u sobre v.

b) La componente del vector de u ortogonal a v.

1. $u = \langle 8, 2, 0 \rangle$, $v = \langle 2, 1, -1 \rangle$

2. $u = 2i + j + 2k$; $v = 3j + 4k$

Solución:

1) a) $\text{Proy}_v u = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|v|^2}\right) \cdot \vec{v}$

- $|v| = \sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$

$$\text{Proy}_v u = \left(\frac{8 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-1)}{(\sqrt{6})^2}\right) \cdot \langle 2, 1, -1 \rangle$$

$$= \frac{16 + 2 + 0}{6} \cdot \langle 2, 1, -1 \rangle$$

$$= \frac{18}{6} \cdot \langle 2, 1, -1 \rangle$$

$$= 3 \cdot \langle 2, 1, -1 \rangle$$

$$= \langle 6, 3, -3 \rangle$$

b) $u = W_1 + W_2$

Sabemos que $W_1 = Proy_v\, u = \langle 6, 3, -3 \rangle$.

$W_2 = u - W_1 = \langle 8, 2, 0 \rangle - \langle 6, 3, -3 \rangle$

$W_2 = \langle 8-6, 2-3, 0-(-3) \rangle$

$\underline{\underline{W_2 = \langle 2, -1, 3 \rangle}}$ (Las componentes del vector ortogonal).

---

2) a) $Proy_v\, u = \left(\dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|v|^2} \right) \cdot \vec{v}$

- $|v| = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

$Proy_v\, u = \left(\dfrac{2(0) + 1(3) + 2(4)}{(5)^2} \right) \cdot (3j + 4k)$

$= \dfrac{11}{25}(3j + 4k)$

$= \dfrac{33}{25} j + \dfrac{44}{25} k$

b) $u = W_1 + W_2$; Sabemos que $W_1 = Proy_v\, u = \frac{33}{25} j + \frac{44}{25} k$

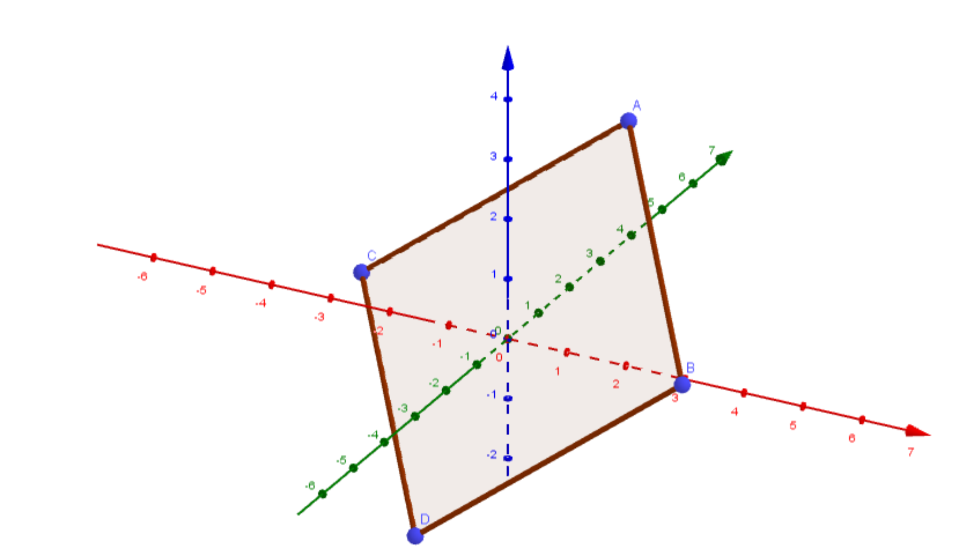
$\Rightarrow W_2 = u - W_1 = (2i + j + 2k) - \left(\frac{33}{25} j + \frac{44}{25} k \right)$

$W_2 = \left(2i + j - \frac{33}{25} j + 2k - \frac{44}{25} k \right)$

$\underline{\underline{W_2 = 2i - \frac{8}{25} j + \frac{6}{25} k}}$ (Las componentes del vector ortogonal)

2) Calcular el área del paralelogramo con vértices en $A(1,2,3)$, $B(4,-2,1)$ $C(-3,1,0)$ y $D(0,-3,-2)$.

Solución



Tenemos los vectores:

$\overrightarrow{BA} = u = \langle -3, 4, 2 \rangle = -3i + 4j + 2K$

$\overrightarrow{BD} = V = \langle -4, -1, -3 \rangle = -4i - j - 3K$

Sabemos que el área de un paralelogramo formado por los vectores u y v, es el modulo de su producto vectorial.

i) Calculamos producto vectorial:

$$U \times V = \begin{vmatrix} i & j & K \\ -3 & 4 & 2 \\ -4 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} j - \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} K$$

$$U \times V = -10i - 17j + 19K$$

ii) Calculamos el modulo de $u \times v$

$$\text{Área} = |u \times v| = \sqrt{(-10)^2 + (-17)^2 + (19)^2} = \sqrt{750} \ u^2$$

Escaneado con CamScanner

3) Encuentre un vector unitario que sea perpendicular tanto a $2i+j-3K$ como a $i+K$.

Solución:

Sean $\vec{u} = 2i + j - 3K$ y $\vec{V} = i + K$

El vector unitario en dirección de $\vec{u} \times \vec{V}$ es perpendicular tanto a $\vec{u}$ como a $\vec{V}$.

$$\vec{u} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} i & j & K \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} K =$$

$$\vec{u} \times \vec{V} = i - 5j - K$$

$$|\vec{u} \times \vec{V}| = \sqrt{(1)^2 + (-5)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+25+1} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

El vector unitario perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{V}$ respectivamente se obtiene mediante la expresión siguiente:

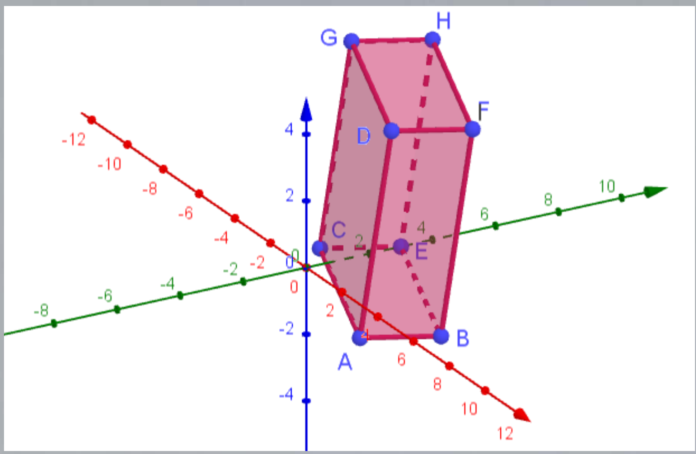
$$V_U = (\vec{U} \times \vec{V}) \cdot \frac{1}{|\vec{U} \times \vec{V}|}$$

$$V_U = (i - 5j - K) \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{3\sqrt{3}} i - \frac{5}{3\sqrt{3}} j - \frac{1}{3\sqrt{3}} K$$

$$\boxed{V_U = \frac{1}{3\sqrt{3}} i - \frac{5}{3\sqrt{3}} j - \frac{1}{3\sqrt{3}} K}$$

4) ¿Cuál es el volumen del paralelepípedo con vértices en $\underset{A}{(3,0,-1)}$, $\underset{B}{(4,2,-1)}$, $\underset{C}{(-1,1,0)}$, $\underset{D}{(3,1,5)}$, $\underset{E}{(0,3,0)}$, $\underset{F}{(4,3,5)}$, $\underset{G}{(-1,2,6)}$ y $\underset{H}{(0,4,6)}$?

Solución:



$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (4-3,\ 2-0,\ -1-(-1)) = (1,2,0)$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AD} = (3-3,\ 1-0,\ 5-(-1)) = (0,1,6)$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{AC} = (-1-3,\ 1-0,\ 0-(-1)) = (-4,1,1)$$

Volumen:

$$V = |(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ -4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\cdot 1 - \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}\cdot 2 + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}\cdot 0$$

$$V = (-5)\cdot 1 - (24)\cdot 2 + (4)\cdot 0 = -5-48+0 = -53 \Rightarrow V = |-53| = 53$$

Como el volumen es una medida positiva, tenemos que el volumen del paralelepípedo es $53\ u^3$.

5) Suponga que se le dan vectores distintos de cero a, b y c en $\mathbb{R}^3$. Use los producto punto y cruz para dar expresiones de vectores que satisfagan las siguientes descripciones geométricas:

1. Un vector ortogonal a $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

Sean $\vec{a} = \langle 2, -1, 5 \rangle$ y $\vec{b} = \langle -8, -1, 3 \rangle$

Vamos a buscar el vector $\vec{d}$ que es ortogonal a $\vec{a}$ y $\vec{b}$;

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 5 \\ -8 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -8 & 3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -8 & -1 \end{vmatrix} k$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = 2i - 46j + 10k$$

$$\Rightarrow \vec{d} = \vec{a} \times \vec{b} = (2, -46, 10) \quad \text{(vector ortogonal)}$$

2) Un vector de longitud 2, ortogonal a $\vec{a}$ y $\vec{b}$

En 1) Calculamos el producto cruz de $\vec{a} \times \vec{b}$, obtuvimos

$\vec{a} \times \vec{b} = \langle 2, -46, -10 \rangle$.

Ahora determinemos $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(2)^2 + (-46)^2 + (-10)^2} = \sqrt{4 + 2116 + 100} = \sqrt{2220}$$

Hallemos el vector unitario perpendicular a $\vec{a}$ y $\vec{b}$:

$$V_u = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \frac{1}{|\vec{a} \times \vec{b}|} =$$

$$V_u = (2i - 46j - 10k) \cdot \frac{1}{\sqrt{2220}} = \frac{2}{\sqrt{2220}} i - \frac{46}{\sqrt{2220}} j - \frac{10}{\sqrt{2220}} k$$

Luego multiplicamos el vector unitario por 2, para obtener un vector de longitud 2.

$$\vec{e} = 2 V_u = 2\left(\frac{2}{\sqrt{2220}} i - \frac{46}{\sqrt{2220}} - \frac{10}{\sqrt{2220}} k\right)$$

$$\boxed{\vec{e} = \frac{4}{\sqrt{2220}} i - \frac{92}{\sqrt{2220}} j - \frac{20}{\sqrt{2220}} k}$$

=

3) La proyección del vector de b sobre a

$$\text{Proy}_a\, b = \left(\frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2}\right)\cdot\vec{a}$$

$$\cdot\ |\vec{a}| = \sqrt{(2)^2+(-1)^2+(5)^2} = \sqrt{4+1+25} = \sqrt{30}$$

$$\text{Proy}_a\, b = \left(\frac{-8\cdot 2+(-1)\cdot(-1)+3\cdot 5}{(\sqrt{30})^2}\right)\cdot\langle 2,-1,5\rangle$$

$$= \frac{-16+2+15}{30}\cdot\langle 2,-1,5\rangle$$

$$= \frac{1}{30}\langle 2,-1,5\rangle$$

$$= \left\langle \frac{1}{15}, -\frac{1}{30}, \frac{1}{6}\right\rangle$$

$=$

4. Un vector con longitud de b y la dirección de a

i. $|\vec{b}| = \sqrt{(-8)^2 + (-1)^2 + (3)^2} = \sqrt{64 + 1 + 9} = \sqrt{74}$ (longitud de b)

ii. $|\vec{a}| = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (5)^2} = \sqrt{4 + 1 + 25} = \sqrt{30}$

Dirección de $\vec{a}$: $\left\langle \frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{-1}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}} \right\rangle$ (Es un vector unitario tambien)

Luego, multiplicamos la longitud de $\vec{b}$ por la dirección de $\vec{a}$:

$$\vec{w} = \sqrt{74} \cdot \left\langle \frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{-1}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}} \right\rangle$$

$$\boxed{\vec{w} = \left\langle \frac{2\sqrt{74}}{\sqrt{30}}, \frac{-\sqrt{74}}{\sqrt{30}}, \frac{5\sqrt{74}}{\sqrt{30}} \right\rangle}$$

$=$

5. Un vector ortogonal a $\vec{a}$ y $\vec{b} \times \vec{c}$.

Sean $\vec{a} = \langle 2, -1, 5 \rangle$, $\vec{b} = \langle -8, -1, 3 \rangle$ y

$\vec{c} = \langle 2, 4, -1 \rangle$

i. Calculamos $\vec{b} \times \vec{c}$

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -8 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} -8 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} -8 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} k$$

$$\vec{b} \times \vec{c} = -11i - 2j - 30k$$

ii) Vamos a buscar el vector $\vec{w}$ que es ortogonal a $\vec{a}$ y $\vec{b} \times \vec{c}$:

$$\vec{w} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{b}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 5 \\ -11 & -2 & -30 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -30 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -11 & -30 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 11 & -2 \end{vmatrix} k$$

$$\boxed{\vec{w} = 40i + 5j - 15k}$$ vector ortogonal.