Sistema di pendoli non accoppiati

L'apparato è composto da 15 pendoli di differente lunghezza, i cui punti di sospensione sono ugualmente spaziati, di una quantità d, lungo l'asse x. Indichiamo con d_i le posizioni dei pendoli:

$$d_i = (i-1)d \qquad i = 1, \cdots, 15 \tag{1}$$

A riposo, i pendoli, sono disposti lungo l'asse x (fig. 1a). Le lunghezze dei pendoli sono stabilite in modo tale che, in un determinato intervallo di tempo Γ, l'i-esimo pendolo compia un numero di oscillazioni N_i (non necessariamente intero), e tra un pendolo e il successivo la differenza nel numero di oscillazioni sia una quantità costante, δ (anche questa non necessariamente intera). Possiamo allora scrivere $N_i = N_1 + (i-1)\delta$, e per frequenze e pulsazioni, avremo:

$$f_i = \frac{N_i}{\Gamma} = \frac{N_1 + (i-1)\delta}{\Gamma} \rightarrow \omega_i = 2\pi \frac{N_1 + (i-1)\delta}{\Gamma} \quad , \quad i = 1, \cdots, 15 \tag{2}$$

Le lunghezze dei pendoli si ricavano da:

$$\omega_i = \sqrt{\frac{g}{L_i}} \rightarrow L_i = \frac{g}{\omega_i^2} \tag{3}$$

Le equazioni del moto dei pendoli sono (ipotizzando piccole oscillazioni e stessa ampiezza massima al tempo $t = 0$ per tutti i pendoli):

$$y_i = A\cos(\omega_i t)$$

Le coordinate dei punti di sospensione dei pendoli sono:

$$S_i = \big((i-1)d, 0, L_i\big)$$

Le posizioni dei pendoli al variare del tempo, sempre per piccole oscillazioni, sono date da:

$$P_i = \left((i-1)d, A\cos(\omega_i t), L_i - \sqrt{L_i^2 - [A\cos(\omega_i t)]^2}\right)$$

Le oscillazioni dei vari pendoli avvengono in piani paralleli al piano yz (fig. 1b):

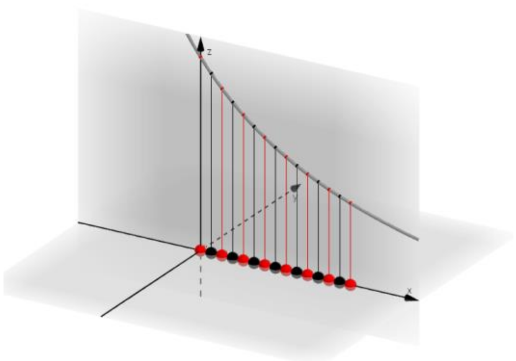

Fig. 1a

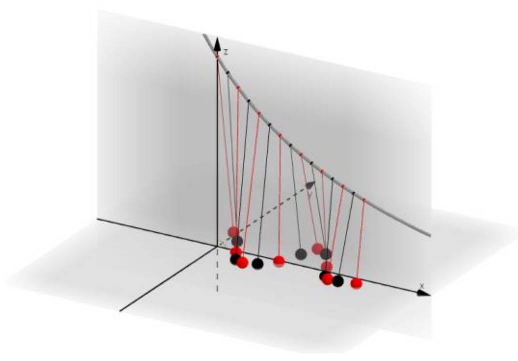

Fig. 1b

Fig. 1: sistema di pendoli non accoppiati

Funzione interpolante del sistema di pendoli non accoppiati

È possibile determinare una funzione continua, $y(x,t)$, del tipo:

$$y(x,t) = A\cos(kx - \omega t) \qquad (4)$$

in grado di interpolare le posizioni che ognuno dei pendoli assume nel tempo. Il fatto che i vari pendoli oscillano con pulsazioni ω_i differenti fa sì che il parametro ω presente in (4) non sia costante. Per costruire una funzione $\omega(x)$, e quindi interpretare le ω_i in modo continuo anziché discreto, operiamo la sostituzione $d_i \rightarrow x$. Ne segue, da (1) e (2) che:

$$i - 1 = \frac{x}{d} \quad \rightarrow \quad \omega(x) = 2\pi\frac{N_1 + \frac{x}{d}\delta}{\Gamma} = \frac{2\pi N_1}{\Gamma} + \frac{2\pi\delta}{\Gamma d}x = \omega_1 + \frac{2\pi\delta}{\Gamma d}x$$

Se moltiplichiamo questa espressione per t, otteniamo:

$$\omega(x)t = \omega_1 t + \frac{2\pi\delta t}{\Gamma d}x$$

Troviamo cioè un termine del tipo $kx - \omega t$, con $k = k(t) = \frac{2\pi\delta}{\Gamma d}t$ e $\omega = -\omega_1$. Utilizzando questo termine come argomento del coseno, supponendo che tutti i pendoli abbiano la stessa escursione iniziale A, si può osservare che l'equazione:

$$y(x,t) = A\cos\left(\frac{2\pi\delta t}{\Gamma d}x + \omega_1 t\right)$$

è proprio la funzione cercata in quanto, essa interpola in ogni istante di tempo le posizioni dei pendoli. In fig. 2, si presentano alcune situazioni:

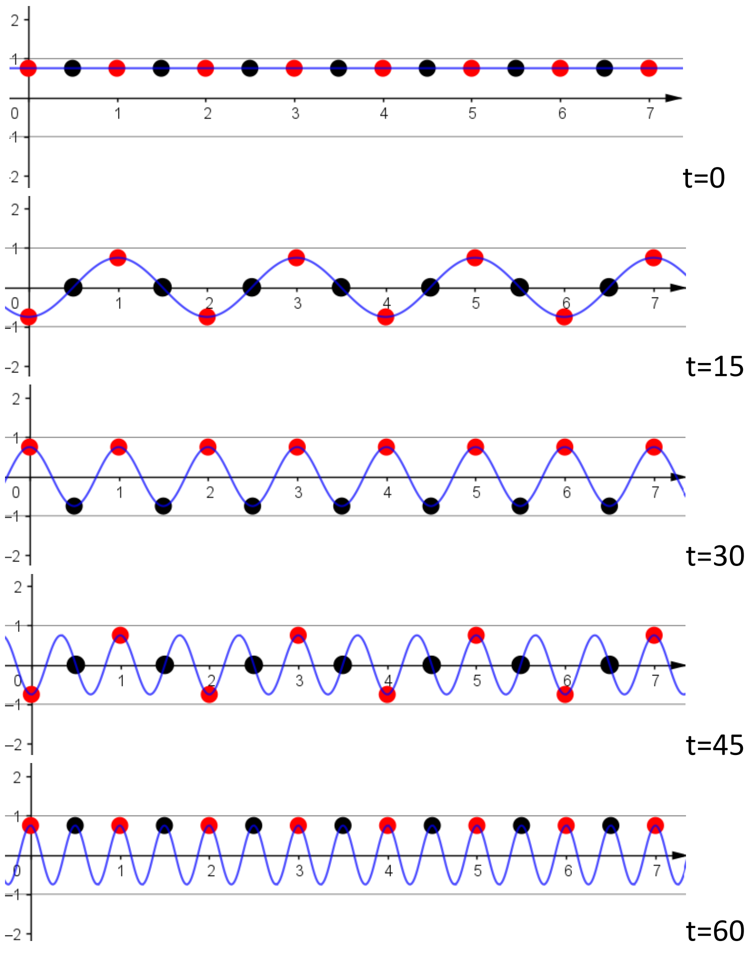

Fig. 2: posizione dei pendoli per tempi differenti e funzione interpolante

Si è scelto: $\Gamma = 60$, $N = 26$, $\delta = 1, d = 0.5$. le configurazioni si ripetono quindi con periodicità $\mathrm{T} = 60$. Un fatto rilevabile da questi grafici è che le configurazioni sono simmetriche rispetto a $\Gamma/_2$ (confrontare, ad esempio, $t = 0$ e $t = 60$, oppure $t = 15$ e $t = 45$). Ciò che cambia in queste coppie di casi simmetrici è la lunghezza d'onda della funzione interpolante.