Problemas – Tema 6

Problemas resueltos - 5 - sistemas de ecuaciones con dos parámetros

1. Sea el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{matrix} a\cdot x+(2a+1)y-az=1 \\ a\cdot x+y-a\cdot z=-2b \\ a\cdot y+(1-a)z=b \end{matrix}\right\}$

a) Discutir sus posibles soluciones según el valor de los parámetro $a,b\in\mathbb{R}$ **.**

b) Resolver el sistema cuando sea compatible indeterminado.

c) Para $a=-1$ **y** $b=0$ **el sistema es compatible determinado. Añadir una cuarta ecuación para que el nuevo sistema sea incompatible.**

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} a & 2a+1 & -a & 1 \\ a & 1 & -a & -2b \\ 0 & a & 1-a & b \end{array}\right) \rightarrow F'_2=F_2-F_1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} a & 2a+1 & -a & 1 \\ 0 & -2a & 0 & -2b-1 \\ 0 & a & 1-a & b \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow F'_3=2\cdot F_3+F_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} a & 2a+1 & -a & 1 \\ 0 & -2a & 0 & -2b-1 \\ 0 & 0 & 2-2a & -1 \end{array}\right)$

Discusión de casos:

- Si $2-2a=0 \rightarrow a=1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2b-1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$ → Absurdo en F_3 → No hay solución → S.I. → sin solución
- Si $a=0 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2b-1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right)$
  - Si $-2b-1=0 \rightarrow b=\frac{-1}{2} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right)$ → Obtenemos un sistema equivalente con dos ecuaciones y dos incógnitas y , z con solución única, y la variable x puede tomar cualquier valor en el sistema de partida ya que va multiplicada por un factor 0 en las tres ecuaciones → La variable x funciona como un parámetro libre → Infinitas soluciones → S.C.I.
  - Si $-2b-1\neq 0 \rightarrow b\neq\frac{-1}{2}$ → Absurdo en F_2 → No hay solución → S.I.
- En general, si $a\neq 0$ y $a\neq 1$ → Solución única → S.C.D.

b) El sistema es compatible indeterminado para $a=0$ y $b=\frac{-1}{2}$, donde obtenemos el sistema equivalente → $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right)$ → $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right)$ → $z=\frac{-1}{2}$, $y=1$, siendo la variable x un parámetro libre $x=\lambda$.

c) Para $a=-1$ y $b=0$ el sistema es compatible determinado y la matriz ampliada queda de la forma → $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{array}\right)$ → $\left\{\begin{array}{c} x-y+z=1 \\ 2y=-1 \\ 4z=-1 \end{array}\right\}$ → Donde las soluciones únicas son $z=\frac{-1}{4}$, $y=\frac{-1}{2}$ → $x=\frac{-3}{4}$ → Por lo tanto una cuarta ecuación que podríamos añadir para obtener una incongruencia es, por ejemplo, $x=0$ ya que contradice al valor solución obtenido anteriormente. Nuestro sistema incompatible sería → $\left\{\begin{array}{c} x-y+z=1 \\ 2y=-1 \\ 4z=-1 \\ x=0 \end{array}\right\}$