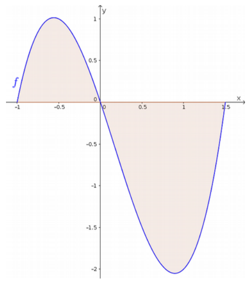
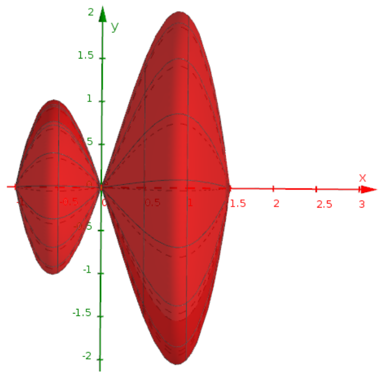
Rotationsvolumen



Eine Integralfläche rotiert um die x-Achse und lässt dabei einen Rotationskörper entstehen. Das Volumen des Rotationskörpers lässt sich per Integralrechnung bestimmen:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$



Hierbei spielt es, anders als bei der Integralfläche, keine Rolle, ob sich im Integrationsintervall eine schneidende Nullstelle befindet. Das liegt daran, dass die Funktion noch vor dem Integrieren quadriert wird.

<u>Beispiel:</u>
Der Graph der Funktion $f(x) = 2x^3 - x^2 - 3x$ rotiert im Intervall $[-1; 1{,}5]$ um die x-Achse. Gesucht ist das Volumen des dabei entstehenden Rotationskörpers.

<u>Lösung:</u>

$$\begin{aligned}
V &= \pi \cdot \int_{-1}^{1{,}5} (2x^3 - x^2 - 3x)^2 \; dx \\
&= \pi \cdot \int_{-1}^{1{,}5} (4x^6 - 4x^5 - 11x^4 + 6x^3 + 9x^2) \; dx \\
&= \pi \cdot \left[\tfrac{4}{7}\, x^7 - \tfrac{2}{3}\, x^6 - \tfrac{11}{5}\, x^5 + \tfrac{3}{2}\, x^4 + 3x^3 \right]_{-1}^{1{,}5} \\
&= \pi \cdot \Big(\big(\tfrac{4}{7}\,(1{,}5)^7 - \tfrac{2}{3}\,(1{,}5)^6 - \tfrac{11}{5}\,(1{,}5)^5 + \tfrac{3}{2}\,(1{,}5)^4 + 3(1{,}5)^3 \big) \\
&\qquad - \big(\tfrac{4}{7}\,(-1)^7 - \tfrac{2}{3}\,(-1)^6 - \tfrac{11}{5}\,(-1)^5 + \tfrac{3}{2}\,(-1)^4 + 3(-1)^3 \big) \\
&= \pi \cdot \left(\left(\tfrac{2187}{224} - \tfrac{243}{32} - \tfrac{2673}{160} + \tfrac{243}{32} + \tfrac{81}{8}\right) - \left(-\tfrac{4}{7} - \tfrac{2}{3} + \tfrac{11}{5} + \tfrac{3}{2} - 3\right) \right) \\
&= \pi \cdot \left(\left(\tfrac{891}{280}\right) - \left(-\tfrac{113}{210}\right) \right) \\
&= \tfrac{625}{168}\, \pi \approx 11{,}69
\end{aligned}$$

Der Rotationskörper hat ein Volumen von ca. 11,69 VE.
(VE=Volumeneinheiten)

Dahlmannschule Bad Segeberg