Problemas – Tema 4

Problemas resueltos - 11 - problemas enunciado para plantear sistema de ecuaciones

1. Un estudiante ha gastado 57 euros en una papelería por la compra de un libro, una calculadora y un estuche. Sabemos que el libro cuesta el doble que el total de la calculadora y el estuche juntos.

a) ¿Es posible determinar de forma única el precio del libro? ¿Y el de la calculadora? Razona las respuestas.

b) Si el precio del libro, la calculadora y el estuche hubieran sufrido un 50 %, un 20% y un 25% de descuento respectivamente, el estudiante habría pagado un total de 34 euros. Calcula el precio de cada artículo.

a) Planteamos la siguientes incógnitas:

Precio del libro: x

Precio de la calculadora: y

Precio del estuche: z

La suma total es igual a 57 euros → $x+y+z=57$

El libro cuesta el doble de la calculadora y el estuche juntos → $x=2(y+z)$

Tenemos un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas por lo que, si existe solución, dependerá de al menos un parámetro libre.

El valor del libro (x) sí podemos calcularlo de manera única:

Primera ecuación → $x+y+z=57 \rightarrow y+z=57-x$

Segunda ecuación → $x=2(y+z) \rightarrow 2y+2z=x$

Al doble de la primera ecuación le restamos la segunda ecuación → $x=38$ €

Sustituyendo este valor en las dos ecuaciones de partida:

$$y+z=19$$
$$2y+2z=38$$

Ambas ecuaciones son proporcionales (la segunda es el doble de la primera), por lo que ambas ofrecen la misma información. Por lo tanto, podemos prescindir de una de ellas. Así tendremos una única ecuación con dos incógnitas.

$y=19-z$ → El valor de y (calculadora) depende del valor libre de z (estuche)

El sistema tiene, en consecuencia, infinitas soluciones (un parámetro libre).

b) Con los descuentos podemos generar una nueva ecuación:

$$0{,}5\,x+0{,}8\,y+0{,}75\,z=34 \quad , \quad x=38 \quad \rightarrow \quad 0{,}8\,y+0{,}75\,z=15$$

Que junto a nuestra ecuación anterior $y=19-z$, forma un sistema 2×2 con solución única.

$$\left\{\begin{matrix} 0{,}8\,y+0{,}75\,z=15 \\ y=19-z \end{matrix}\right\} \quad \rightarrow \quad y=15\ € \quad , \quad z=4\ €$$

2. Un mayorista vende billetes de avión a agencias de viajes. A una primera agencia A le vende 10 billetes nacionales, 10 billetes de países comunitarios y otros 10 billetes a países no europeos y le cobra 12000 euros. También le vende a una agencia B 10 billetes nacionales y 20 a países no europeos y le cobra 13000. Y a una agencia C le vende 10 billetes nacionales y 10 billetes comunitarios y le cobra 7000 euros. ¿Cuál es el precio de cada billete?

Precio de un billete nacional: x
Precio de un billete comunitario: y
Precio de un billete no comunitarios: z

Podemos plantear tres ecuaciones, con las frases del enunciado.

$$\left\{\begin{matrix} 10x+10y+10z=12000 \\ 10x+20z=13000 \\ 10x+10y=7000 \end{matrix}\right\} \rightarrow \text{simplificamos} \rightarrow \left\{\begin{matrix} x+y+z=1200 \\ x+2z=1300 \\ x+y=700 \end{matrix}\right\}$$

De la tercera ecuación podemos despejar: $y=700-x$ → sustituimos en las otras dos ecuaciones.

$$\left\{\begin{matrix} x+700-x+z=1200 \\ x+2z=1300 \end{matrix}\right\}$$

De la nueva primera ecuación resulta: $z=500$

De la segunda nueva ecuación: $x=1300-2z \rightarrow x=300$

Y por lo tanto: $y=700-x \rightarrow y=400$

Solución final: $x=300\,€\ ,\ \ y=400\,€\ ,\ \ z=500\,€$

3. El cajero automático de una determinada entidad bancaria solo admite billetes de 50, de 20 y de 10 euros. Los viernes depositan en el cajero 225 billetes por un importe total de 7000 euros. Averiguar el número de billetes de cada valor depositado, sabiendo que la suma del numero de billetes de 50 y de 10 euros es el doble que el número de billetes de 20 euros.

x → número de billetes de 50 euros

y → número de billetes de 20 euros

z → número de billetes de 10 euros

Tenemos un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas.

$$\begin{cases} 50x+20y+10z=7000 \\ x+y+z=225 \\ x+z=2y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y+z=225 \\ 50x+20y+10z=7000 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$$

De la tercera ecuación → $z=2y-x$ → $\begin{cases} 3y=225 \\ 40x+40y=7000 \end{cases}$ → $y=\frac{225}{3}=75$

Sustituyendo el valor de y , obtenemos la soluciones $x=100$, $y=75$, $z=50$.

4. Calcular las edades actuales de una madre y sus dos hijos sabiendo que hace 14 años la edad de la madre era 5 veces la suma de las edades de los hijos en aquel momento, que dentro de 10 años la edad de la madre será la suma de las edades que los hijos tendrán en ese momento y que cuando el hijo mayor tenga la edad actual de la madre, el hijo menor tendrá 42 años.

Analizamos los datos que nos da el problema:

- ✓ x = edad de la madre
- ✓ y = edad del hermano mayor
- ✓ z = edad del hermano menor

A continuación buscaremos ecuaciones que nos ayuden a resolver las incógnitas:

- ✓ Sabiendo que hace 14 años la edad de la madre era 5 veces la suma de las edades de los hijos en aquel momento → $x-14=5\cdot[(y-14)+(z-14)]$
- ✓ Sabiendo que dentro de 10 años la edad de la madre será la suma de las edades que los hijos tendrán en ese momento → $x+10=(y+10)+(z+10)$
- ✓ Y por último, con el dato de que cuando el hijo mayor tenga la edad actual de la madre, el hijo menor tendrá 42 años, sacamos la ecuación → $z+(x-y)=42$

Simplificando y ordenando las tres ecuaciones deducimos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x-5y-5z=-126 \\ x-y-z=10 \\ x-y+z=42 \end{cases}$$

Tenemos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que resolvemos por el método de Gauss.

$$\begin{cases} x-5y-5z=-126 \\ x-y-z=10 \\ x-y+z=42 \end{cases} \rightarrow \text{Intercambiamos el orden de las dos primeras filas}$$

$$\begin{cases} x-y-z=10 \\ x-5y-5z=-126 \\ x-y+z=42 \end{cases} \rightarrow \quad F'_2=F_2-F_1 \quad , \quad F'_3=F_3-F_1$$

$$\begin{cases} x-y-z=10 \\ x-4y-4z=-136 \\ 2z=32 \end{cases} \rightarrow \quad 2z=-32 \quad \rightarrow \quad z=16 \quad \rightarrow \quad y=18 \quad , \quad x=44$$

Solución: Madre 44 años, hijo mayor 18 años e hijo menor 16 años.

5. La edad de un padre es doble de la suma de las edades de sus dos hijos, mientras que hace unos años (exactamente la diferencia de las edades actuales de los hijos), la edad del padre era triple que la suma de las edades, en aquel tiempo, de sus hijos. Cuando pasen tantos años como la suma de las edades actuales de los hijos, la suma de edades de las tres personas será 150 años. ¿Qué edad tenía el padre en el momento de nacer sus hijos?

Edad del padre actual: x
Edad actual del hijo mayor: y
Edad actual del hijo menor: z

Transformamos las frases del enunciado a ecuaciones matemáticas.

$$x=2(y+z) \rightarrow x=2y+2z \rightarrow x-2y-2z=0$$

$$x-(y-z)=3(y-(y-z)+z-(y-z)) \rightarrow x-(y-z)=3(z-y+2z) \rightarrow x+2y-8z=0$$

$$x+(y+z)+y+(y+z)+z+(y+z)=150 \rightarrow x+4y+4z=150$$

Quedando el sistema:

$$\left\{\begin{matrix} x-2y-2z=0 \\ x+2y-8z=0 \\ x+4y+4z=150 \end{matrix}\right\}$$

Cuya matriz ampliada es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -8 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 150 \end{array}\right) \rightarrow F'_2=F_2-F_1 \ , \ F'_3=F_3-F_1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 150 \end{array}\right)$$

Intercambiamos orden de columnas: $C_2 \leftarrow\rightarrow C_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 150 \end{array}\right) \rightarrow F'_3=F_3+F_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 150 \end{array}\right)$$

Y despejamos incógnitas desde la última a la primera ecuación (recordando que hemos permutado el orden de la segunda y tercera columna).

$$y=15 \rightarrow z=10 \rightarrow x=50$$

Por lo tanto, el padre tenía 35 años cuando nació su hijo mayor, y 40 años cuando nació su hijo menor.

6. Se tienen tres lingotes compuestos del siguiente modo:

- **El primero de 20 g de oro, 30 g de plata y 40 g de cobre.**
- **El segundo de 30 g de oro, 40 g de plata y 50 g de cobre.**
- **El tercero de 40 g de oro, 50 g de plata y 90 g de cobre.**

Se pide qué peso habrá de tomarse de cada uno de los lingotes anteriores para formar un nuevo lingote de 34 g de oro, 46 g de plata y 67 g de cobre.

Primero establecemos las incógnitas:

- x es el % del primer lingote que usaremos para el nuevo lingote.
- y es el % del segundo lingote que usaremos para el nuevo lingote.
- z es el % del tercer lingote que usaremos para el nuevo lingote.

Planteamos la ecuación para el oro del nuevo lingote → $20x+30y+40z=34$

Para la plata del nuevo lingote → $30x+40y+50z=46$

Y para el cobre del nuevo lingote → $40x+50y+90z=67$

Y planteamos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{pmatrix} 20x+30y+40z=34 \\ 30x+40y+50z=46 \\ 40x+50y+90z=67 \end{pmatrix}$$

Si multiplicamos la primera por $3/2$ y le restamos la segunda → $F'_2=\frac{3}{2}F_1-F_2$

$$\begin{pmatrix} 20x+30y+40z=34 \\ 5y+10z=5 \\ 40x+50y+90z=67 \end{pmatrix}$$

Si multiplicamos la primera por 2 y le restamos la tercera → $F'_3=2F_1-F_3$

$$\begin{pmatrix} 20x+30y+40z=34 \\ 5y+10z=5 \\ 10y-10z=1 \end{pmatrix}$$

Si multiplicamos la segunda por 2 y le restamos la tercera → $F'_3=2F_2-F_3$

$$\begin{pmatrix} 20x+30y+40z=34 \\ 5y+10z=5 \\ 30z=9 \end{pmatrix}$$

De la tercera fila → $z=\frac{9}{30}=0.3$

Sustituyendo en la segunda fila → $5y+3=5 \rightarrow y=\frac{2}{5}=0.4$

Sustituyendo en la primera fila → $20x+12+12=34 \rightarrow x=\frac{10}{20}=0.5$

La masa total del primer lingote es 90g, por lo que su 50% es 45g.

La masa del segundo lingote es igual a 120g, por lo que su 40% es 48g.

La masa del tercer lingote es 180g, y su 30% será 54g.

Sumando 45g + 48g + 54g obtenemos los 147g del nuevo lingote.

7. Los gastos diarios de tres estudiantes, Marta, Raúl y Pedro suman 51.5 euros. Si a los que gasta Marta se le suma el triple de la diferencia entre los gastos de Raúl y Pedro, obtenemos lo que gasta Pedro. Ocho veces la diferencia entre el gasto de Raúl y el de Marta es igual al gasto de Marta. ¿Cuánto gasta cada uno?

El enunciado del problema permite plantear un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas:

x → gastos de Marta

y → gastos de Raúl

z → gastos de Pedro

$$\begin{Bmatrix} x+y+z=51,5 \\ x+3(y-z)=z \\ 8(y-x)=x \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x+y+z=51,5 \\ x+3y-4z=0 \\ -9x+8y=0 \end{Bmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 51,5 \\ 1 & 3 & -4 & 0 \\ -9 & 8 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Aplicamos las siguientes transformaciones: $F'_2=F_2-F_1$, $F'_3=F_3+9\cdot F_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 51,5 \\ 0 & 2 & -5 & -51,5 \\ 0 & 17 & 9 & 463,5 \end{array}\right) \rightarrow F'_3=2\cdot F_3-17\cdot F_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 51,5 \\ 0 & 2 & -5 & -51,5 \\ 0 & 0 & 103 & 1802,5 \end{array}\right)$$

Soluciones: $103z=1802,5 \rightarrow z=17,5\,€ \rightarrow y=18\,€ \rightarrow x=16\,€$

8. En una cafetería, tres cafés, una tostada y dos zumos de naranja cuestan 7,50€. Cuatro cafés, una tostada y un zumo de naranja cuestan 7,20€.

a) Calcula, de manera razonada, el precio total de dos cafés, una tostada y tres zumos de naranja.

b) ¿El precio de un zumo de naranja podría ser de 2€? Razona tu respuesta.

a) Planteamos las tres ecuaciones, siendo C el precio de un café, T el precio de una tostada y Z el precio de un zumo de naranja.

$$\left\{\begin{matrix} 3C+T+2Z=7{,}50 \\ 4C+T+Z=7{,}20 \\ 2C+T+3Z=k \end{matrix}\right\}$$

En la tercera ecuación no conocemos el precio total, por lo que incluimos un parámetro inicial. Según los posibles valores de ese parámetro podemos decidir si el sistema tiene solución. Por lo tanto, llegamos a un ejercicio de sistema de ecuaciones dependiente de un parámetro inicial, que resolvemos por Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 7{,}50 \\ 4 & 1 & 1 & 7{,}20 \\ 2 & 1 & 3 & k \end{array}\right) \rightarrow \quad C_1 \leftarrow\rightarrow C_2 \quad \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 7{,}50 \\ 1 & 4 & 1 & 7{,}20 \\ 1 & 2 & 3 & k \end{array}\right) \rightarrow \begin{matrix} F'_2=F_2-F_1 \\ F'_3=F_3-F_1 \end{matrix} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 7{,}50 \\ 0 & 1 & -1 & -0{,}30 \\ 0 & -1 & 1 & k-7{,}50 \end{array}\right) \rightarrow \quad F'_3=F_3+F_2 \quad \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 7{,}50 \\ 0 & 1 & -1 & -0{,}30 \\ 0 & 0 & 0 & k-7{,}80 \end{array}\right)$$

Tras terminar Gauss, comprobar la ausencia de absurdos matemáticos y la ausencia de filas proporcionales, el rango del sistema se define como el número de ecuaciones con al menos un coeficiente no nulo.

Si $k=7{,}80$ → Tendremos Rango 2 y 3 incógnitas → SCI con infinitas soluciones y un parámetro libre

Si $k\neq 7{,}80$ → Tendremos un absurdo matemático en la tercera fila → SI sin solución

El precio total de los dos cafés, la tostada y los tres zumos de naranja será igual a $7{,}80\,€$.

b) En el caso en que el sistema tiene solución, despejamos el valor de las variables.

$$Z=\lambda\in\mathbb{R}$$

$$F_2 \rightarrow \quad C-Z=-0{,}30 \quad \rightarrow \quad C=-0{,}30+\lambda$$

$$F_1 \rightarrow \quad T+3C+2Z=7{,}50 \quad \rightarrow \quad T-0{,}90+3\lambda-0{,}60+2\lambda=7{,}50 \quad \rightarrow \quad T=9-5\lambda$$

Si el precio de una tostada los fijamos en $\lambda=2\,€$, provocaría un precio negativo en la tostada:

$$T=9-5\cdot 2=-1$$

No habría solución, porque no tiene sentido precios negativos.

9. Tres lápices, un cuaderno y una agenda han costado 5€, lo mismo que dos cuadernos y una agenda. ¿Podemos saber el precio de cada artículo si ninguna es gratis y en céntimos todos son múltiplos de 50?

Planteamos el sistema de ecuaciones, siendo L, C y A los precios de un lápiz, de un cuaderno y de una agenda respectivamente. El precio en euros la expresamos en céntimos de euros.

$$\begin{Bmatrix} 3L+C+A=500 \\ 2C+A=500 \end{Bmatrix}$$

Con esta información tendríamos un sistema de rango 2 y 3 incógnitas → SCI con infinitas soluciones y un parámetro libre.

$$A=\lambda\in\mathbb{R}$$

$$F_2 \rightarrow 2C+A=500 \rightarrow C=250-\frac{\lambda}{2}$$

$$F_1 \rightarrow 3L+C+A=500 \rightarrow 3L+250-\frac{\lambda}{2}+\lambda=500 \rightarrow 3L=250-\frac{\lambda}{2} \rightarrow L=\frac{250}{3}-\frac{\lambda}{6}$$

Las condiciones del enunciado afirman que ningún artículo es gratis. Por lo tanto: $\lambda>0$.

Además de esta condición, el precio de los artículos no puede ser negativo: $A>0, C>0, L>0$.

Por último, el precio de cada artículo debe ser múltiplo de 50 céntimos.

Para $A=\lambda\in\mathbb{R}$, se cumplen todas las condiciones anteriores si $\lambda=\{50,100,150,200,...\}$

Para $C=250-\frac{\lambda}{2}=\frac{500-2\lambda}{2}$, necesitamos que el numerador sea positivo. Por lo tanto:

$$500-2\lambda>0$$

Esto acota los valores del parámetro libre a: $\lambda=\{50,100,150,200\}$, ya que desde 250 en adelante el precio de jun cuaderno sería cero o negativo.

Además, el cociente $C=\frac{500-2\lambda}{2}$ debe ser múltiplo de 50, y esta condición se cumple también para los cuatro valores $\lambda=\{50,100,150,200\}$.

Finalmente, para $L=\frac{250}{3}-\frac{\lambda}{6}=\frac{500-\lambda}{6}$, necesitamos que el numerador sea positivo. Los cuatro valores $\lambda=\{50,100,150,200\}$ cumplen esa condición.

El cociente $L=\frac{500-\lambda}{6}$, nuevamente, debe ser múltiplo de 50. Y esa condición solo se cumple para $\lambda=200$, ya que $L=\frac{500-200}{6}=50$.

Conclusión: El precio de una agenda es de 200 céntimos, el precio de un cuaderno es de 50 céntimos, y el precio de un lápiz es de 50 céntimos.