Teoría – Tema 1

Teoría - 1 - típicos errores matemáticos elementales

Despejar, paréntesis y raíces cuadradas

Repasamos brevemente algunos despistes y “errores tontos” que arruinan con frecuencia una buena nota en los exámenes de Matemáticas.

Comenzamos despejando ecuaciones de primer grado igualadas a cero.

$$3x=0 \quad \rightarrow \quad x=0-3 \quad \rightarrow \quad x=-3 \quad \rightarrow \text{Noooooooooo}$$

$$3x=0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{0}{3} \quad \rightarrow \quad x=0 \quad \rightarrow \text{Síííííí}$$

Los paréntesis, esos amigos que aparecen y desaparecen.

$$f(x)=2x+1 \quad \rightarrow \quad f(-1)=2-1+1 \quad \rightarrow \quad f(-1)=2 \quad \rightarrow \text{Noooooooooo}$$

$$f(x)=2x+1 \quad \rightarrow \quad f(-1)=2(-1)+1 \quad \rightarrow \quad f(-1)=-1 \quad \rightarrow \text{Síííííí}$$

Más sobre paréntesis y potencias.

$$f(x)=x^2+4 \quad \rightarrow \quad f(-2)=-2^2+4 \quad \rightarrow \quad f(-2)=-4+4 \quad \rightarrow \quad f(-2)=0 \quad \rightarrow \text{Nooooooo}$$

$$f(x)=x^2+4 \quad \rightarrow \quad f(-2)=(-2)^2+4 \quad \rightarrow \quad f(-2)=4+4 \quad \rightarrow \quad f(-2)=8 \quad \rightarrow \text{Sííííí}$$

Al resolver una inecuación, no pases la variable x al otro lado de la igualdad multiplicando o dividiendo.

$$\frac{x}{x-1}\leq\frac{2x+1}{x+5} \quad \rightarrow \quad \frac{x(x+5)}{(x-1)(2x+1)}\leq 1 \quad \rightarrow \text{Noooooooo}$$

$$\frac{x}{x-1}\leq\frac{2x+1}{x+5} \quad \rightarrow \quad \frac{x}{x-1}-\frac{2x+1}{x+5}\leq 0 \quad \rightarrow \quad \frac{x(x+5-(2x+1)(x-1))}{(x-1)(x+5)}\leq 0 \quad \rightarrow \text{Síííííí}$$

Ojito al despejar en ecuaciones con logaritmos. Un error típico es:

$\ln(x+1)-\ln(x-3)=\ln(x) \rightarrow x+1-(x-3)=x \rightarrow 4=x$ → Nooooooooo

$\ln(x+1)-\ln(x-3)=\ln(x) \rightarrow \ln\left(\frac{x+1}{x-3}\right)=\ln(x) \rightarrow \frac{x+1}{x-3}=x$ → Síííííííí

Al resolver una ecuación con logaritmos, debemos comprobar que los valores obtenidos para x hacen positivos los argumentos de los logaritmos. Igualmente, al resolver ecuaciones con raíces cuadradas, los argumentos de las raíces no pueden ser negativos.

$\sqrt{x-1}-\sqrt{2x}=0 \rightarrow \sqrt{x-1}=\sqrt{2x} \rightarrow x-1=2x \rightarrow x=-1$ es solución → Noooooo

El valor $x=-1$ hace negativo el argumento de $\sqrt{x-1}$ y de $\sqrt{2x}$ → No hay solución real.

Ojo al aplicar raíz cuadrada al resolver una ecuación. No olvides los dos signos: positivo y negativo.

$x^2-4=0 \rightarrow x^2=4 \rightarrow x=\sqrt{4} \rightarrow x=2$ → Nooooooooo

$x^2-4=0 \rightarrow x^2=4 \rightarrow x=\pm\sqrt{4} \rightarrow x=\pm 2$ → Síííííííííííí

Factor común, simplificar y m.c.m.

Si en una suma o resta de términos encontramos un factor que aparece en todos los términos, podemos aplicar factor común. Por ejemplo:

$$3x^3+2x^2+x \quad \rightarrow \quad x(3x^2+2x+1)$$

Si aplicamos esto en el numerador y denominador de una fracción, podremos simplificar. Pero ojito con las meteduras de pata.

$$\frac{1+x^2+x^4}{x^3} \quad \rightarrow \quad \frac{1+x^2(1+x^2)}{x^2\cdot x} \quad \rightarrow \quad \frac{1+\cancel{x^2}(1+x^2)}{\cancel{x^2}\cdot x} \quad \rightarrow \quad \frac{1+(1+x^2)}{x} \quad \rightarrow \quad \frac{2+x^2}{x}$$ → Noooooooo

Solo podemos tachar en numerador y denominador si el factor común afecta a todos los sumandos.

$$\frac{4x^2+2x}{8x} \quad \rightarrow \quad \frac{2x(2x+1)}{2x(4)} \quad \rightarrow \quad \frac{\cancel{2x}(2x+1)}{\cancel{2x}(4)} \quad \rightarrow \quad \frac{2x+1}{4}$$ → Síííííí

Ojo con las operaciones elementales en las raíces.

$\sqrt{x-3} \quad \rightarrow \quad \sqrt{x}-\sqrt{3}$ → Noooooo

$\sqrt{x^2+4} \quad \rightarrow \quad \sqrt{x^2+2^2} \quad \rightarrow \quad x+2$ → Nooooooo

$\sqrt{x\cdot y} \quad \rightarrow \quad \sqrt{x}\cdot\sqrt{y}$ → Síííííí

$\sqrt{\frac{x}{y}} \quad \rightarrow \quad \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$ → Sííííí

Si vas a operar en una ecuación con denominadores, no multiplices los denominadores a lo loco. Aplica m.c.m. y así obtendrás operaciones más sencillas y reducirás la posibilidad de obtener soluciones no válidas (por anular al denominador).

$$\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x}=0 \quad \rightarrow \quad \frac{2\cdot x-1\cdot x^2}{x^2\cdot x}=0 \quad \rightarrow \quad \frac{2x-x^2}{x^3}=0 \quad \rightarrow \quad 2x-x^2=0\cdot x^3$$

$2x-x^2=0 \quad \rightarrow \quad x(2-x)=0$ → soluciones: $x=0, x=2$ → Noooooooo ---> ¿Por qué?

El valor $x=0$ no puede ser solución porque anula a los denominadores de la ecuación de partida. Para evitar llegar a estas incongruencias en la solución, deberías haber simplicado un factor x en numerador y denominador. O mucho más cómodo: haber aplicado mínimo común múltiplo (m.c.m.) desde el principio.

$\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x}=0$ → m.c.m: x^2 → $\frac{2\cdot 1-1\cdot x}{x^2}=0$ → $\frac{2-x}{x^2}=0$ → $2-x=0\cdot x^2$

$2-x=0$ → solución única: $x=2$ → Síííííííííííí

Recuerda: si la ecuación polinómica posee fracciones, debes comprobar siempre que las soluciones obtenidas no anulan a los denominadores de partida. A veces, aplicando m.c.m., se evita que aparzcan estas soluciones no válidas gracias al proceso de simplificación llevado a cabo con el m.c.m.

Exponentes negativos y fraccionarios

Todo exponente negativo puede expresarse con exponente positivo. Por ejemplo:

$$2^{-3}=\frac{1}{2^3}$$

Las raíces pueden verse como exponentes fraccionarios. Por ejemplo:

$$\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$$

Ojito con las raíces. A veces simplificamos a lo loco.

$\sqrt{1+x^2}=\sqrt{1}+\sqrt{x^2}=1+x$ → Noooooooo

Binomio de Newton

Llegamos al gran talón de Aquiles de las operaciones elementales: el binomio de Nexton o también llamadas identidades notables.

$(x+y)^2=x^2+y^2$ → Noooooooo

$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$ → Sííííí

$(x-y)^2=x^2-y^2$ → Nooooooo

$(x-y)^2=x^2+y^2-2xy$ → Sííííí

$(x+y)(x-y)=x^2-y^2$ → Sííííí

Y si tenemos tres sumandos dentro de una potencia al cuadrado, no nos podemos inventar nuevas reglas.

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2$ → Noooooooo

$(a+b+c)^2=(a+b+c)(a+b+c)$ →

$(a+b+c)(a+b+c)=a^2+ab+ac+ba+b^2+bc+ca+cb+c^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$ → Síííí