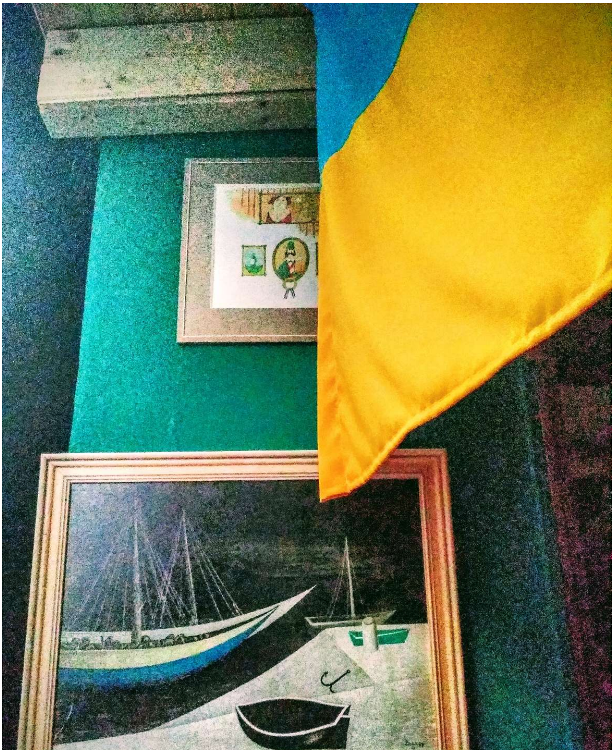
Sbírka GVP: 6-leté študium

Zákon zachování mechanické energie

Žán Pól Kastról



29. března 2022

1 Zadání

6L Př. 1: Gustav Ústav na Matějské pouti ⇒

Na Matějské pouti mají stroj na měření síly. Palicí se udeří do páky, která vyhodí do výšky závaží. Ke stroji přišel jednoho dne *Gustav Ústav* a palicí o hmotnosti 5 kg praštil do páky tak rychle, že závaží o hmotnosti 13 kg vyletělo do výšky 4 m.

Zanedbej pro jednoduchost odpor vzduchu božího duchu (dále jen $\mathcal{VBD}$) a předpokládej také, že se veškerá pohybová energie palice předala závaží – čili neuvažuj ztráty mechanické energie.

Urči rychlost dopadu palice.

6L Př. 2: Eleazar Bazar, Bohem obdařený bohém ⇒

Eleazar Bazar, Bohem obdařený bohém, jednou ráno zkoušel takovýto hokus-pokus – pustil volným pádem šutr o hmotnosti 3 kg z výšky 20 m.

a) Kolik procent tvořily ztráty mechanické energie způsobené odporem $\mathcal{VBD}$, jestliže naměřil rychlost dopadu $10\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$?
b) Jakou rychlostí by šutr dopadl, kdyby padal bez odporu vzduchu?

6L Př. 3: Zlatá *Buddhova* socha ⇒

Zlatá *Buddhova* socha ($m = 1\,\mathrm{kg}$) padá volně bez odporu $\mathcal{VBD}$ z výšky 5 m.

Urči:
a) Rychlost *Buddhy* po uražení dráhy 1 m.

b) Kinetickou energii a rychlost *Buddhy* v polovině výšky.
c) Kolik procent z celkové mechanické energie tvoří kinetická energie *Buddhy* ve vzdálenosti 1 m před dopadem?

6L Př. 4: Rabindranáth Hnát vrhl ⇒

Rabindranáth Hnát vrhl zlostí svůj pohyblivý telefon ($m = 100\,\mathrm{g}$) z výšky 20 m rychlostí $10\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ svisle dolů tak, že dopadl rychlostí $20\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

a) Zachovává se mechanická energie čili nic?
b) Pakliže nikoli, kolik procent z původní energie tvoří ztráty?

6L Př. 5: Vilém Problém jednou večír ⇒

Vilém Problém jednou večír měřil hloubku vyschlé studny na hradě *Dívčí kámen*. Použil k tomu tříkilovou hroudu jačího tuku, kterou nechal volně padat do studny a zjistil, že rychlost dopadu byla $6\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Jak hluboká byla studna, jestliže víme, že byla dokonale evakuovaná, čiliž nemusíme uvažovat odpor $\mathcal{VBD}$?

6L Př. 6: Jan Ámos Rákos jednou v poledne ⇒

Jan Ámos Rákos jednou v poledne také měřil hloubku vyschlé studny, ale na hradě *Helfenburk*. Rozdíl oproti *Problémovu* případu Jan Ámos Rákos jednou v poledne (viz Př. 5) byl v tom, že studnu neevakuoval, takže byla plničká $\mathcal{VBD}$ a pád byl vlivem odporu vzduchu ovlivněn.

Jaká byla hloubka studny, jestliže rychlost dopadu byla $6\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ a ztráty mechanické energie byly $50\,\%$?

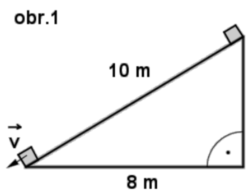
6L Př. 7: Vladimír Iljič Klíč volně pustil míč ⇒

Vladimír Iljič Klíč volně pustil míč o hmotnosti $1\,\mathrm{kg}$ bez odporu vzduchu z výšky $2\,\mathrm{m}$. Po odrazu míč vyskočil jen do výšky $1{,}5\,\mathrm{m}$.

Kolik procent mechanické energie se ztratilo při odrazu?

6L Př. 8: Bedýnka s banány ⇒

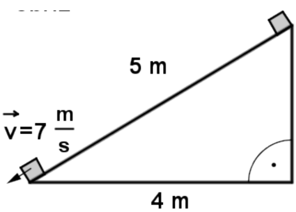
Bedýnka s banány o hmotnosti $1\,\mathrm{kg}$ klouže bez tření a odporu vzduchu po nakloněné rovince z klidu (viz obr).



Jakou rychlost má dole, vole?

6L Př. 9: Bedýnka s kokosy ⇒

Bedýnka s kokosy o hmotnosti $2\,\mathrm{kg}$ klouže po nakloněné rovině z klidu bez odporu vzduchu, ale se třením (viz obr).



a) Urči ztráty mechanické energie způsobené třením.
b) Jakou práci vykonala třecí síla?
c) Urči velikost třecí síly.

6L Př. 10: Mág Gideon Bon-bon vypustil ⇒

Mág *Gideon Bon-bon* vypustil volným pádem (bez odporu $\mathcal{VBD}$) magickou knihu *Ibbur* (8 kg magických formulí) z výšky 12 m.

a) Urči rychlost dopadu
b) Urči E_k a E_p ve výšce 5 m
c) Urči rychlost ve výšce 5 m

2 Výsledky a některá řešení

6L Př. 1: Gustav Ústav na Matějské pouti ⇐

$$v = \sqrt{\frac{2m_2gh}{m_1}}$$

$$v = \sqrt{208}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

Vyzavel :
$m_1 = 5kg$
$m_2 = 13kg$
$h = 4m$
$v = ?$

Rozbor :
Žádné ztráty → veškerá kinetická energie dopadnuvší palice se přemění na potenciální energii závaží, které vyletělo do výšky *h*.

⇒ Zákon zachov. mech. energie : $\frac{1}{2}m_1v^2 = m_2gh$

2 řešení:
Mohu řešit buď rovnou číselně, čili dosadit do vzorce a pak upravovat a vyjádřit *v*, nebo postupuji tak, že hledám nejprve obecné řešení a pak teprve na závěr dosadím.
Oba postupy jsou OK, někdy je lepší první, jindy druhý, na střední škole se ovšem upřednostňuje řešení obecné.
Porovnej obě řešení a nauč se obě!

Číselné řešení :

$$\frac{1}{2}m_1v^2 = m_2gh$$
$$\frac{1}{2}\cdot 5\cdot v^2 = 13\cdot 10\cdot 4$$
$$\frac{1}{2}\cdot 5\cdot v^2 = 520$$
$$5\cdot v^2 = 2\cdot 520$$
$$5\cdot v^2 = 1040$$
$$v^2 = \frac{1040}{5}$$
$$v^2 = 208$$
$$v = \sqrt{208}\,ms^{-1}$$

Obecné řešení :

$$\frac{1}{2}m_1v^2 = m_2gh$$
$$m_1v^2 = 2m_2gh$$
$$v^2 = \frac{2m_2gh}{m_1}$$
$$v = \sqrt{\frac{2m_2gh}{m_1}}$$
$$v = \sqrt{\frac{2\cdot 13\cdot 10\cdot 4}{5}}$$
$$v = \sqrt{208}\,ms^{-1}$$

Poznámka:
Všimni si, že obecné řešení je zde vlastně jednodušší a rychlejší. Výhoda obecného řešení – odvozený vzorec $v = \sqrt{\frac{2m_2gh}{m_1}}$ můžeme použít opakovaně i pro jiná číselná zadání tohoto příkladu!
To je síla, co?

Výsledek :
$v = \sqrt{208}ms^{-1} \doteq 14,42ms^{-1}$

6L Př. 2: Eleazar Bazar, Bohem obdařený bohém ⇐

a) $75\,\%$ b) $v_2 = 20\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$

Vyzavel :
$m = 3kg$
$h = 20m$
$v_1 = 10ms^{-1}$
$ztráty = ?$
$v_2 = ?$

Rozbor :
Jsou tu ztráty $\rightarrow$ část mech. energie se přemění na teplo. Zjistíme energii na počátku a na konci a uvidíme, jaké jsou ztráty.

Všimni si, že zde úlohu neřešíme obecně, protože je to rychlejší rovnou číselně.

Kdyby padal bez odporu vzduchu, tak by se zachovávala mech. energie $\rightarrow$ kinetická energie těsně před dopadem by byla $600J \rightarrow \frac{1}{2}mv_2{}^2 = 600 \rightarrow \frac{1}{2}3v_2{}^2 = 600 \rightarrow$
$3v_2{}^2 = 1200 \rightarrow v_2{}^2 = 400 \rightarrow v_2 = 20ms^{-1}$

Výsledek :
Ztráty jsou 75%; $v_2 = 20ms^{-1}$

6L Př. 3: Zlatá *Buddhova* socha ⇐

a) $v_1 = \sqrt{20}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} \doteq 4{,}5\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$

b) $E_{k2} = 25\,\mathrm{J} \qquad v_2 = \sqrt{50}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} \doteq 7{,}1\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$

c) $80\,\%$

Vyzavel :
$m = 1kg$
$h = 5m$
$s_1 = 1ms^{-1} \rightarrow h_1 = 4m$
$h_2 = \frac{h}{2} = 2,5m$
$h_3 = 1m$
$a)\ v_1 = ?$
$b)\ E_{k2} = ?, v_2 = ?$
$c)\ E_{k3} = ? \rightarrow \text{převést na } \%$

Rozbor: Padá volně → žádné ztráty. Mechanická energie se tedy zachovává, jen se přeměňuje v průběhu pádu potenciální energie na kinetickou.

⇩

Zákon zachování mechanické energie:
$E_{celková} = E_p + E_k$
Mech. energie počáteční (těleso má nulovou rychlost, takže $E_k = 0$):
$E_{celková} = E_p + E_k = mgh + 0 = 1 \cdot 10 \cdot 5 = 50J \rightarrow$ těch $50J$ se zachovává!

a) urazí 1 m → $h_1 = 4m$
$\rightarrow E_{p1} = mgh_1 = 1 \cdot 10 \cdot 4 = 40J$
$50J - 40J = 10J \rightarrow E_{k1} = 10J$
to je nyní E_{k1} ve výšce h_1.
Zbývá určit rychlost v_1.

⇨

Číselné řešení :
$E_{k1} = 10J$
$E_{k1} = \frac{1}{2} m v_1^2$
$10 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot v_1^2$
$20 = v_1^2$
$v_1 = \sqrt{20}\ ms^{-1} \doteq 4,47ms^{-1}$

Obecné řešení :
$E_{k1} = \frac{1}{2} m v_1^2$
$2E_{k1} = m v_1^2$
$\frac{2E_{k1}}{m} = v_1^2$

⇨

$v_1 = \sqrt{\frac{2E_{k1}}{m}}$
$v_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 10}{1}}$
$v_1 = \sqrt{20}\ ms^{-1}$
$v_1 \doteq 4,47ms^{-1}$

b) $h_2 = 2,5m$
$\rightarrow E_{p2} = mgh_2 = 1 \cdot 10 \cdot 2,5 = 25J$
$50J - 25J = 25J \rightarrow$
to je nyní E_{k2} ve výšce h_2.
Zbývá určit rychlost v_2.

⇨

Číselné řešení :
$E_{k2} = 25J$
$E_{k2} = \frac{1}{2} m v_2^2$
$25 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot v_2^2$
$50 = v_2^2$
$v = \sqrt{50}\ ms^{-1} \doteq 7,07ms^{-1}$

Obecné řešení už jsem udělal v a)! :
$v_2 = \sqrt{\frac{2E_{k2}}{m}}$
$v_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 25}{1}}$
$v_1 = \sqrt{50}\ ms^{-1}$
$v_1 \doteq 7,07ms^{-1}$

c) $h_3 = 1m$
$\rightarrow E_{p3} = mgh_3 = 1 \cdot 10 \cdot 1 = 10J$
$50J - 10J = 40J \rightarrow$
to je nyní E_{k3} ve výšce h_3.
Zbývá určit *procenta*.

⇨

$\frac{E_{k3}}{E_{celková}} = \frac{40}{50} = 0,8 \rightarrow 80\%$

Výsledek: a) $v = \sqrt{20}\ ms^{-1}$ b) $E_k = 25$ J; $v = \sqrt{50}\ ms^{-1}$ c) 80%

6L Př. 4: Rabindranáth Hnát vrhl ⇐

a) Mech. energie se nezachovává:

$$E_{c1} = 25\,\text{J} \quad \text{kdežto} \quad E_{c2} = 20\,\text{J}$$

b) Ztráty jsou $\boxed{20\,\%}$

Vyzavel: $m = 0{,}1\,\text{kg}$; $h = 20\,\text{m}$; $v_1 = 10\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $v_2 = 20\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; ztráty $= ?$

Nahoře: $E_{c1} = mgh + \frac{1}{2}mv_1^2 = (0,1\cdot 10\cdot 20 + 0,5\cdot 0,1\cdot 10^2) = \underline{\underline{25\,\text{J}}}$

Dole: $E_{c2} = \frac{1}{2}mv_2^2 = 0,5\cdot 0,1\cdot 20^2 = \underline{\underline{20\,\text{J}}}$

a) Celková mechanická energie **nahoře** je větší než **dole**. Mechanická energie se tedy nezachovala.

b) Ztráty jsou $25 - 20 = 5\,\text{J}$ z původních $25\,\text{J}$, což je jedna pětina, tedy $20\,\%$.

6L Př. 5: Vilém Problém jednou večír ⇐

$\boxed{h = \frac{v^2}{2g}}$ $\boxed{h = 5\,\text{m}}$

Vyzavel: $m = 3\,\text{kg}$; $v = 10\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $h = ?$

No tak hele, o nic nejde. Energie nahoře byla pouze a toliko potenciální a dole těsně před dopadem pouze a toliko kinetická. Páč se nám tu mech. energie zachovává, platí:

$$E_p = E_k$$
$$\cancel{m}gh = \frac{1}{2}\cancel{m}v^2$$
$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{10^2}{2\cdot 10} = \underline{\underline{5\,\text{m}}}$$

Všimni si, že se hmotnost vykrátila a ve vztahu pro výšku vůbec nevystupuje!

6L Př. 6: Jan Ámos Rákos jednou v poledne ⇐

$$\boxed{h = \frac{v^2}{g}} \qquad \boxed{h = 3{,}6\,\mathrm{m}}$$

Vyzavel: $v = 6\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$; ztráty: $50\,\%$; $h = ?$

Kinetická energie těsně před dopadem je tedy poloviční než potenc. energie na začátku:

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v^2 = \frac{\cancel{m}gh}{2}$$
$$v^2 = gh$$
$$h = \frac{v^2}{g} = \frac{6^2}{10} = \underline{\underline{3{,}6\,\mathrm{m}}}$$

6L Př. 7: Vladimír Iljič Klíč volně pustil míč ⇐

$$\boxed{25\,\%}$$

Vyzavel: $m = 1\,\mathrm{kg}$; $h_1 = 2\,\mathrm{m}$; $h_2 = 1{,}5\,\mathrm{m}$; Ztráty $= ?$

$$E_{p1} = mgh_1 = 1\cdot 10\cdot 2 = 20\,\mathrm{J}$$
$$E_{p2} = mgh_2 = 1\cdot 10\cdot 1,5 = 15\,\mathrm{J}$$

Ztráty jsou 5 J z 20 J, což je jedna čtvrtina, čiliž $\underline{\underline{25\,\%}}$.

6L Př. 8: Bedýnka s banány ⇐

$v = \sqrt{2gh}$ | $v = \sqrt{120} \doteq 11\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$

Vyzavel: $m = 1\,\mathrm{kg}$; $s = 10\,\mathrm{m}$; $d = 8\,\mathrm{m}$; $v = ?$

Potenciální energie *nahoře* se beze zbytku přemění na kinetickou energii *dole*. Jen si nejprve spočítáme výšku nakloněné rovinky – vidíme, že strany trojúhelníku jsou dvojnásobky notoricky známé pythagorejské trojice 3–4–5, takže bude $h = 5\,\mathrm{m}$.

$$\cancel{m}gh = \frac{1}{2}\cancel{m}v^2$$
$$v^2 = 2gh$$
$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 6} = \sqrt{120} = 2\sqrt{30} \doteq \underline{\underline{11\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}}}$$

6L Př. 9: Bedýnka s kokosy ⇐

a) ztráty: 11 J | b) $W = 11\,\mathrm{J}$ | c) $F_t = 2{,}2\,\mathrm{N}$

Vyzavel: $m = 2\,\mathrm{kg}$; $s = 5\,\mathrm{m}$; $d = 4\,\mathrm{m}$; ztráty $= ?$; $A = ?$; $F_t = ?$

Vidíme, že výška $\mathcal{NR}$ je $h = 3\,\mathrm{m}$ (Pythagorejská trojice 3–4–5)

Nahoře: $E_{c1} = mgh = 2 \cdot 10 \cdot 3 = 60\,\mathrm{J}$

Dole: $E_{c2} = \frac{1}{2}mv^2 = 0.5 \cdot 2 \cdot 7^2 = 49\,\mathrm{J}$

a) Ztráty mech. energie jsou tedy

$$E_{c2} - E_{c1} = 60 - 49 = \underline{\underline{11\,\mathrm{J}}}$$

b) Kdo za tyto ztráty může? Třecí síla, to ona si s tím dala tu práci, aby nás takto poškodila! Tyto ztráty jsou rovny práci třecí síly:

$$A = E_{c2} - E_{c1} = \underline{\underline{11\,\mathrm{J}}}$$

c) Práce je síla krát dráha:

$$A = F_t \cdot s \rightarrow F_t = \frac{A}{s} = \frac{11}{5} = \underline{\underline{2{,}2\,\mathrm{N}N}}$$

6L Př. 10: Mág Gideon Bon-bon vypustil ⇐

a) $\boxed{v_{dop} = 4\sqrt{15} \doteq 15{,}5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$

b) $\boxed{E_k(5\,\mathrm{m}) = 560\,\mathrm{J} \quad E_p(5\,\mathrm{m}) = 400\,\mathrm{J}}$

c) $\boxed{v(5\,\mathrm{m}) = 8{,}4\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$

Vyzavel: $m = 8\,\mathrm{kg}$; $h_1 = 12\,\mathrm{m}$; $h_2 = 5\,\mathrm{m}$; $v = ?$; $E_k(5\,\mathrm{m}) = ?$; $E_p(5\,\mathrm{m}) = ?$; $v(5\,\mathrm{m}) = ?$

---

a) No tak hele, nahoře je celková mech. energie E_c rovna potenciální energii (páč kinetická je tam nulová)

$$E_c = E_p + E_k = mgh_1 + 0 = 8 \cdot 10 \cdot 12 = 960\,\mathrm{J} \qquad \text{(a)}$$

Tato energie se po celou dobu pádu bude zachovávat (je to bez odporu $\mathcal{VBD}$), jen se bude přeměňovat potenciální energie na kinetickou.

Čiliž úplně dole (těsně před dopadem) bude celková energie rovna energii kinetické (páč potenciální je tam nulová):

$$E_c = E_p + E_k = 0 + \frac{1}{2}mv^2 \tag{b}$$

Mech. energie nahoře a dole jsou stejné, porovnáme tedy pravé strany rovnic (a) a (b) a určíme rychlost dopadu:

$$\cancel{m}gh = \frac{1}{2}\cancel{m}v^2$$

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 12} = \sqrt{240} = 4\sqrt{15} \doteq \underline{\underline{15{,}5\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}}}$$

b) Ve výšce $h = 5\,\mathrm{m}$ bude potenciální energie

$$E_p(5\,\mathrm{m}) = mgh_2 = 8 \cdot 10 \cdot 5 = \underline{\underline{400\,\mathrm{J}}}$$

Kinetická energie v této výšce proto bude:

$$E_k(5\,\mathrm{m}) = E_c - E_p(5\,\mathrm{m}) = 960 - 400 = \underline{\underline{560\,\mathrm{J}}}$$

c) Z kinetické energie ve výšce $h = 5\,\mathrm{m}$ určíme rychlost v této výšce:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v^2 = \frac{2E_k}{m} \to v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 560}{8}} = \sqrt{70} \doteq \underline{\underline{8{,}4\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}}}$$